91. Les poignées de main et les bises * ** * ******

Lorsque des amis se rencontrent, tout le monde se serre la main et des bises s'échangent exclusivement entre les hommes et les femmes et entre femmes. En Suisse, la coutume veut qu'entre deux personnes, il y ait un échange de six bises.

a) Combien y a-t-il de poignées de main quand 3 personnes se rencontrent ?
b) Combien y a-t-il de bises lorsque 1 femme rencontre 3 hommes ?
c) Combien y a-t-il de bises lorsque 3 femmes et 2 hommes se rencontrent ?
d) Combien y a-t-il de poignées de main lorsque 16 femmes et 22 hommes se rencontrent ?
e) A l'anniversaire de David, il y avait plusieurs femmes et plusieurs hommes. Lorsqu'ils se rencontrèrent, ils se firent 132 bises. Combien y avait-il d'hommes à cet anniversaire ?
f) Dans une fête à laquelle participèrent au moins cinq femmes et cinq hommes, combien y avait-il de personnes sachant que l'on dénombra 5658 bises ?

Solutions

a) Soit a, b et c, les trois personnes. a serre la main de b et de c et b serre la main de c. Cela fait **3 poignées de main**.
b) Lorsqu'une femme rencontre un homme, il y a un échange de 6 bises. Lorsqu'une femme rencontre trois hommes, il y a un échange de **18 bises**.
c) Soit F1, F2 et F3, les trois femmes. Soit H1 et H2, les deux hommes.

   F1 fait des bises aux 4 autres personnes. Comme il y a chaque fois un échange de 6 bises, cela fait 24 bises. F1 est éliminé.

   F2 fait des bises aux 3 personnes restantes. Cela fait 18 bises (3 fois 6 bises). F2 est éliminé.

   F3 fait des bises aux 2 personnes restantes. Cela fait 12 bises (2 fois 6 bises). F3 est éliminé.

   Au total, il y a donc **54 bises** (24 + 18 + 12).
d) Il s'agit de comptabiliser le nombre de poignées de main échangées lorsque 38 personnes se rencontrent. La première touche la main de 37 personnes, la 2ème de 36 personnes, la 3ème de 35 personnes, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière personne qui touche la main à la dernière.

   Nombre de poignées de main : $37 + 36 + 35 + 34 + \ldots + 3 + 2 + 1 = 37 + (36 + 1) + (35 + 2) + (34 + 3) + \ldots = 37 + 18 \cdot 37 = 19 \cdot 37 =$ **703 poignées** de main.

   Note : Il existe une formule pour calculer $n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.
e) Soit F le nombre de femmes et H le nombre d'hommes. Comme une femme et un homme se font 6 bises, le nombre total de bises que s'échangent des femmes avec des hommes est égal à $6 \cdot F \cdot H$.

   En utilisant la méthode vue en c), on arrive à savoir que deux femmes s'échangent 6 bises, que trois s'en échangent 18, que quatre s'en échangent 36, que cinq s'en échangent 60, que six s'en échangent 90 et que sept s'en échangent 126.

   Il est alors aisé de compléter le tableau ci-contre dans lequel la troisième colonne donne le nombre de bises entre femmes, la quatrième colonne le nombre de bises entre femmes et hommes et la dernière colonne le nombre total de bises.

F	H	F ↔ F	F ↔ H	Total
2	2	6	24	30
2	3	6	36	42
2	10	6	120	126
2	11	6	132	138
3	5	18	90	108
3	6	18	108	126
3	7	18	126	144
4	3	36	72	108
4	4	36	96	132
5	2	60	60	120
5	3	60	90	150
6	2	90	72	162

   La recherche par essais successifs demande du temps. On verra dans l'exercice f) une méthode beaucoup plus efficace.

   Il y avait **4 hommes** à cet anniversaire.

f) Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes.

Considérons d'abord les embrassades entre femmes et hommes. Cela fait yx embrassades, soit 6yx bises (chaque embrassade correspond à 6 bises).

Considérons ensuite les embrassades entre femmes. Cela fait $\frac{y\left(y-1\right)}{2}$ embrassades, soit $3y\left(y-1\right)$ bises.

On a donc l'équation suivante : $6yx + 3y\left(y-1\right) = 5658 = 3\left(y^2+2xy-y\right) \Rightarrow y^2 + 2xy - y = 1886 = y\,(y + 2x - 1)$.

Or, $1886 = 2 \cdot 23 \cdot 41 = 1 \cdot 1886 = 2 \cdot 943 = 23 \cdot 82 = 41 \cdot 46$.

Comme y et x doivent être supérieurs ou égaux à 5, il nous faut étudier les 4 cas suivants :

1) $y\,(y + 2x - 1) = 23 \cdot 82 \Rightarrow x = 30$.
2) $y\,(y + 2x - 1) = 82 \cdot 23 \Rightarrow$ x n'a pas de solution dans N.
3) $y\,(y + 2x - 1) = 41 \cdot 46 \Rightarrow x = 3$ est impossible car il y avait au moins 5 hommes.
4) $y\,(y + 2x - 1) = 46 \cdot 41 \Rightarrow$ x n'a pas de solution dans N.

Seul le cas y = 23 et x = 30 fonctionne. Il y avait donc **53 personnes** (23 femmes et 30 hommes).