85. Le paradoxe des anniversaires * ******

Il est fortement conseillé de résoudre l'exercice 84 avant d'attaquer cet exercice.

Nous considérons ici que toutes les années ont 365 jours.

a) Dans une salle où il a deux personnes, quelle est la probabilité, en pour cent, que les deux aient leur anniversaire le même jour ?

b) Dans une salle où il y a trois personnes, quelle est la probabilité, en pour cent, qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Répondez aux questions c), d) et e) en considérant qu'il y a n personnes dans une salle ($2 \leq n \leq 365$).

c) Trouvez une formule faisant appel aux factorielles permettant de calculer le nombre de cas où personne n'a la même date d'anniversaire que quelqu'un d'autre.

d) A partir de la formule trouvée en c), trouvez celle qui donne le nombre de cas où au moins deux personnes ont leur anniversaire le même jour.

e) A partir de la formule trouvée en d), déterminez celle qui donne la probabilité que dans cette salle il y ait au moins deux personnes qui ont leur anniversaire le même jour.

f) Combien faut-il de personnes dans une salle, au minimum, pour que la probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour soit supérieure à 50 % ?

Solutions

a) Numérotons chaque jour de l'année en partant du 1er janvier (numéro 1) au 31 décembre (numéro 365).

Nombre de cas possibles : 365^2.

Cherchons le nombre de cas défavorables, c'est-à-dire le nombre de cas où les deux personnes ne sont pas nées le même jour. Il y a 365 choix possibles pour l'anniversaire de la première personne et à chacune d'elle correspond 364 choix possibles pour l'anniversaire de la seconde personne. Si par exemple, la première personne est née le 25 février, il reste 364 dates possibles pour l'anniversaire de la seconde.

Nombre de cas défavorables : $365 \cdot 364$.

Nombre de cas favorables : $365^2 - 365 \cdot 364$. Le nombre de cas favorables est égal à 365 (les deux personnes sont nées le 1er janvier ou les deux personnes sont nées le 2 janvier ou les deux personnes sont nées le 3 janvier, etc.).

Probabilité cherchée : $\frac{365^2 - 365 \cdot 364}{365^2} = 1 - \frac{364}{365} \cong 0{,}002739 \cong$ **<u>0,27 %</u>**, ce qui correspond aussi à $\frac{365}{365^2}$.

b) Nombre de cas possibles : 365^3.

Nombre de cas défavorables : $365 \cdot 364 \cdot 363$.

Nombre de cas favorables : $365^3 - 365 \cdot 364 \cdot 363$.

Probabilité : $\frac{365^3 - 365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} = 1 - \frac{364 \cdot 363}{365^2} \cong 0{,}008204 \cong$ **<u>0,82 %</u>**.

c) En observant les deux cas précédents, on devrait arriver à trouver la formule cherchée :

$$\frac{365!}{(365-n)!}$$

d) Comme le nombre total de cas possibles est 365^n, la formule cherchée est

$$365^n - \frac{365!}{(365-n)!}$$

e) Probabilité : $$1-\frac{365!}{(365-n)!\cdot 365^n}$$

f) Utilisons dans le tableau suivant la formule trouvée en e).

n = nombre de personnes dans la salle

n	Probabilités
2	$1-\frac{365!}{363!\cdot 365^2} = 1-\frac{364}{365} \cong 0{,}002739 \cong 0{,}27$ %.
3	$1-\frac{365!}{362!\cdot 365^3} = 1-\frac{364\cdot 363}{365^2} \cong 0{,}008204 \cong 0{,}82$ %.
4	$1-\frac{365!}{361!\cdot 365^4} = 1-\frac{364\cdot 363\cdot 362}{365^3} \cong 0{,}0163559 \cong 1{,}64$ %.
5	$1-\frac{365!}{360!\cdot 365^5} = 1-\frac{364\cdot 363\cdot 362\cdot 361}{365^4} \cong 0{,}02713 \cong 2{,}71$ %.

A l'aide d'un programme informatique, on obtient ce qui suit :

Pour n = 10, la probabilité est d'environ 11,7 %.

Pour n = 20, la probabilité est d'environ 41,1 %.

Pour n = 22, la probabilité est d'environ 47,6 %.

Pour n = 23, la probabilité est d'environ 50,7 %.

Pour n = 50, la probabilité est d'environ 97 %.

Pour n = 57, la probabilité est d'environ 99 %.

La probabilité est supérieure à 50 % dès qu'il y a **23 personnes** dans une salle.

Cette solution tellement étonnante et si peu intuitive a donné le nom de cet exercice.

Ainsi, dans une classe de 23 élèves, il y plus de 50 % de chance que deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour. Il en est de même avec les 22 joueurs plus l'arbitre sur un terrain de football.