79. Le partage des billes ** ***

Quelques amis jouent avec 120 billes. Ils se les partagent de manière parfaitement équitable. Ensuite, par tirage à la courte paille, ils déterminent un perdant. Ce perdant doit donner le même nombre de billes (au minimum 1 bille) à chacun de ses amis. Ensuite, ils déterminent à nouveau un perdant par tirage à la courte paille, lequel doit donner le même nombre de billes (au minimum 1 bille) à chacun de ses amis. Le jeu continue ainsi, toujours de la même manière. A un certain moment, avant de procéder à un nouveau tirage, l'un d'eux n'a plus de billes et un autre en a 12.

Combien y a-t-il de personnes participant à ce jeu (donnez tous les cas possibles) ?

Solution

Comme le partage au départ se fait de manière équitable, le nombre de personnes est un diviseur de 120 supérieur à 1 (2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, etc.). D'autre part, s'ils ne sont que deux, il ne sera jamais possible que l'un n'ait plus de billes et que l'autre en ait 12. De plus, étant donné que le perdant doit pouvoir donner le même nombre de billes à chacun de ses amis, le nombre de participants ne peut pas être supérieur à 10. Alors, le nombre de participants est 3, 4, 5, 6, 8 ou 10.

1) Supposons un jeu avec 3 participants (A, B et C). Au départ, chacun reçoit 40 billes. Voyons ce qui peut se passer, un peu au hasard, dans le tableau suivant. Le propriétaire dont le nombre de billes est souligné est le perdant. Au haut de chaque colonne est indiqué le nombre de billes que le perdant donne à chacun de ses amis. Ainsi, le premier perdant est A et il donne 1 bille à chacun de ses amis. Le 2ème perdant est B et il donne 2 billes à chacun de ses amis. Avec 3 personnes, on constate que le jeu est possible.

	1	2	5	24	25	5	1	8	
A	40	38	40	45	69	94	99	100	108
B	40	41	37	27	51	1	6	4	12
C	40	41	43	48	0	25	15	16	0

2) Supposons un jeu avec 4 participants. On constate que le jeu est aussi possible.

	10	12	1	5	6	
A	30	0	12	13	18	0
B	30	40	4	1	6	12
C	30	40	52	53	38	44
D	30	40	52	53	58	64

3) Supposons un jeu avec 5 participants. Il semble impossible d'arriver à 0 bille pour un des joueurs et à 12 billes pour un autre.

		4	2	3	
A		24	8	10	13
B		24	28	20	23
C		24	28	30	18
D		24	28	30	33
E		24	28	30	33

En observant les différents tableaux, on s'aperçoit que :

- S'il y a 3 participants, la différence de billes entre deux participants, au même moment du jeu, est toujours un multiple de 3.
- S'il y a 4 participants, la différence de billes entre deux participants, au même moment du jeu, est toujours un multiple de 4.
- S'il y a 5 participants, la différence de billes entre deux participants, au même moment du jeu, est toujours un multiple de 5.

Cette règle peut être généralisée et vérifiée par des procédés mathématiques. Comme il doit y avoir une différence de 12 billes au même moment du jeu, cela ne sera pas possible avec 5, 8 et 10 joueurs.

Ainsi, le nombre de participants est **3**, **4** ou **6**.

Avec 6 joueurs, nous pouvons arriver à la solution par les jeux suivants :

	3	4	2	1	
A	20	23	27	29	30
B	20	5	9	11	12
C	20	23	27	29	30
D	20	23	3	5	0
E	20	23	27	17	18
F	20	23	27	29	30

Dans aucun cas, nous n'avons essayé d'arriver à la solution par un minimum de tirages à la courte paille.

Avec 3 joueurs, la solution peut être obtenue par 4 tirages à la courte paille. Peut-on faire mieux ?

	20	24	12	12	
A	40	0	24	0	12
B	40	60	12	24	0
C	40	60	84	96	108