75. Les sacs de 50 billes * **** *******

a) Trois sacs, A, B et C, contiennent chacun 50 billes. L'un d'eux ne renferme que des billes de 10 g. Un autre ne contient que des billes de 11 g et un autre ne recèle que des billes de 9 g. Afin de déterminer la masse des billes de chaque sac, on extrait a billes du sac A, b billes du sac B et c billes du sac C. Ensuite, on procède à une seule pesée en mettant l'ensemble des billes extraites sur une balance électronique. On souhaite que le nombre total de billes sorties des sacs soit le plus petit possible et on veut que $0 \leq a \leq b \leq c$.

   Combien faut-il sortir de billes de chaque sac ?

b) Quatre sacs, A, B, C et D, contiennent chacun 50 billes. Deux sacs contiennent uniquement des billes de 10 g. Un sac ne contient que des billes de 11 g et un autre sac ne renferme que des billes de 9 g. Afin de déterminer la masse des billes de chaque sac, on extrait a billes du sac A, b billes du sac B, c billes du sac C et d billes du sac D. Ensuite, on procède à une seule pesée en mettant l'ensemble des billes extraites sur une balance électronique. On souhaite que le nombre total de billes sorties des sacs soit le plus petit possible et on veut que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$.

   Combien faut-il sortir de billes de chaque sac ?

c) Huit sacs, A, B, C, D, E, F, G et H, contiennent chacun 50 billes. Six sacs contiennent uniquement des billes de 10 g. Un sac ne contient que des billes de 11 g et un autre sac ne renferme que des billes de 9 g. Afin de déterminer la masse des billes de chaque sac, on extrait a billes du sac A, b billes du sac B, c billes du sac C, d billes du sac D, etc. Ensuite, on procède à une seule pesée en mettant l'ensemble des billes extraites sur une balance électronique. On souhaite que le nombre total de billes sorties des sacs soit le plus petit possible et on veut que $0 \leq a \leq b \leq c \leq \ldots \leq h$.

   Combien faut-il sortir de billes de chaque sac ?

Solutions

a) Il est évident que l'on ne peut pas sortir le même nombre de billes de chaque sac. Essayons de prendre 0 bille dans le sac A, 1 bille dans le sac B et 2 billes dans le sac C. Dans le tableau de gauche suivant, on a mis les 6 cas possibles, avec dans la colonne N, le nombre de billes prises dans chaque sac. Dans le tableau de droite, on trouve la masse totale des billes de chaque sac, et dans la dernière ligne, la masse totale des billes. Pour pouvoir déterminer la masse des billes de chaque sac, il faut que les masses de la dernière ligne soient toutes différentes. On s'aperçoit que ce n'est pas le cas, car on a deux fois la somme 29 et deux fois la somme 31. Cet essai n'est pas concluant.

N	Cas →	1	2	3	4	5	6
2	C	9	9	10	11	11	10
1	B	11	10	9	9	10	11
0	A	10	11	11	10	9	9
		Masse des billes dans chaque sac					

1	2	3	4	5	6
18	18	20	22	22	20
11	10	9	9	10	11
0	0	0	0	0	0
29	28	29	31	32	31

Essayons de prendre 0 bille dans le sac A, 1 bille dans le sac B, et 3 billes dans le sac C. Le tableau suivant nous montre que tout joue. Le nombre total de billes sorties des sacs est 4. On ne peut pas espérer faire mieux.

N	Cas →	1	2	3	4	5	6
3	C	9	9	10	11	11	10
1	B	11	10	9	9	10	11
0	A	10	11	11	10	9	9
		Masse des billes dans chaque sac					

1	2	3	4	5	6
27	27	30	33	33	30
11	10	9	9	10	11
0	0	0	0	0	0
38	37	39	42	43	41

Il faut donc extraire **<u>0 bille de A</u>**, **<u>1 bille de B</u>** et **<u>3 billes de C</u>**. Par exemple, si la masse sur la balance est de 38 g (1er cas), on sait que c'est le sac A qui contient les billes de 10 g, que le sac B contient les billes de 11 g et que le sac C contient les billes de 9 g.

Remarquons avant d'aller plus loin qu'entre les cas 1 et 4 du tableau précédent, on a seulement inversé le 9 et le 11, en gardant les pièces de 10 g dans le même sac. Alors, la masse totale des billes dans les cas 1 et 4 ne peut pas être identique car on sait dès le départ qu'on ne peut pas sortir le même nombre de billes de deux sacs différents. Soit n, le nombre de billes sorties du sac C et m, le nombre de billes tirées du sac B ($n \neq m$), alors $n \cdot 9 + m \cdot 11 \neq n \cdot 11 + m \cdot 9$. Si $n \cdot 9 + m \cdot 11 = n \cdot 11 + m \cdot 9$, alors $2\ m = 2\ n$, d'où $m = n$, ce qui serait contraire à notre affirmation de départ. Cette remarque concernant les cas 1 et 4 peut être faite, mutatis mutandis, pour les cas 2 et 5, ainsi que pour les cas 3 et 6. Ceci nous permettra par la suite de n'étudier que la moitié des cas possibles.

b) Gardons la prise respective de 0 bille, 1 bille et 3 billes (sacs A, B et C). Pour les raisons vues à la fin du point a), il nous suffit ici d'étudier 6 cas. Une recherche systématique nous montre qu'une prise de 4 ou 5 ou 6 billes dans le sac D ne fonctionne pas. Il faut prendre 7 billes dans D pour que ça joue.

N	Cas →	1	2	3	4	5	6
7	D	9	9	9	10	10	10
3	C	11	10	10	9	9	10
1	B	10	11	10	11	10	9
0	A	10	10	11	10	11	11
		Masse des billes dans chaque sac					

1	2	3	4	5	6
63	63	63	70	70	70
33	30	30	27	27	30
10	11	10	11	10	9
0	0	0	0	0	0
106	104	103	108	107	109

Il faut donc extraire **<u>0 bille de A</u>**, **<u>1 bille de B</u>**, **<u>3 billes de C</u>** et **<u>7 billes de D</u>**, soit 11 billes en tout. Chacun peut vérifier qu'il est aussi possible d'extraire **<u>0 bille de A</u>**, **<u>1 bille de B</u>**, **<u>4 billes de C</u>** et **<u>6 billes de D</u>**, soit 11 billes en tout. La recherche à l'aide de la règle de Golomb (voir suite de l'exercice) peut nous montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Une recherche systématique dans le cas de quatre sacs prend déjà pas mal de temps. Heureusement, grâce à l'aide apportée par Jérôme Gavin et Philippe Fondanaiche, il est possible de prendre une voie plus rapide et plus intéressante, comme nous allons le voir maintenant.

Jérôme Gavin est l'auteur de plusieurs livres sur l'histoire des mathématiques. Pour en savoir plus : http://www.jeuxmath.ch/liens.html

Philippe Fondanaiche est le créateur et l'animateur d'un site remarquable de récréations et problèmes mathématiques : http://www.diophante.fr/

Soit x, le nombre de billes extraites du sac contenant les billes de 9 g et y, le nombre de billes extraites du sac contenant des billes de 11 g. On peut vérifier que dans chaque cas, la masse totale des billes extraites des quatre sacs est égale à $y - x$ modulo 10. (Si vous avez oublié ce que signifie modulo ou mod, voir exercice 39 de cette même rubrique).

Exemple du cas 1 du tableau précédent. Nous avons extrait 7 billes de 9 g et 3 billes de 11 g. Donc, $x = 7$ et $y = 3$. Alors $y - x = -4 \equiv 6 \mod 10$. Or $106 \equiv 6 \mod 10$.

Exemple du cas 5 du tableau précédent. Nous avons extrait 3 billes de 9 g et 0 bille de 11 g. Donc, $x = 3$ et $y = 0$. Alors $y - x = -3 \equiv 7 \mod 10$. Or $107 \equiv 7 \mod 10$.

Comme les sommes doivent être distinctes, alors toutes les valeurs $y - x$ doivent aussi être distinctes (les nombres de billes extraites des sacs contenant des billes de 10 g ne jouent aucun rôle en modulo 10). Cela revient à trouver quatre nombres dont les différences (le plus grand moins le plus petit), quand on les prend deux à deux, doivent être distinctes. D'où la règle de Golomb à 4 marques (y compris le zéro). Pour en savoir plus sur la règle de Golomb, voir l'énigme précédente n° 74, dans la même rubrique. Il y a une infinité de groupes de quatre nombres qui satisfont à ces conditions. Mais nous voulons en plus que la somme de ces quatre nombres soit minimale.

On voit ci-après que pour chacune des deux solutions, les 6 différences sont toutes distinctes.

$1 - 0 = 1$ $3 - 0 = 3$ $3 - 1 = 2$ $7 - 0 = 7$ $7 - 1 = 6$ $7 - 3 = 4$

$1 - 0 = 1$ $4 - 0 = 4$ $4 - 1 = 3$ $6 - 0 = 6$ $6 - 1 = 5$ $6 - 4 = 2$

c) Si on a bien compris l'exercice précédent, il suffit alors de trouver une règle de Golomb à 8 marques pour obtenir une solution à notre problème. La difficulté ne revient pas à trouver les 8 marques, mais à faire en sorte que la somme des 8 marques soit la plus petite possible. Dans le tableau suivant, on trouve un certain nombre de règles de Golomb à 8 marques.

1	2	3	4	5	6	7	8	Somme
0	1	3	7	12	20	30	44	117
0	1	4	9	15	22	32	34	117
0	1	3	8	14	18	30	39	113
0	1	5	7	15	18	27	43	115
0	2	6	7	15	18	32	42	122

Le nombre total de billes extraites, au minimum, est 113. Il faut extraire **0 bille de A**, **1 bille de B**, **3 billes de C**, **8 billes de D**, **14 billes de E**, **18 billes de F**, **30 billes de G** et **39 billes de H**.

Jusqu'à preuve du contraire, c'est la meilleure solution…