72. Babar et les bananes ** *** **** *****

L'éléphant Babar a été dressé pour transporter des bananes entre une bananeraie et un marché. Babar travaille volontiers, mais lorsqu'il est en mission, il ne peut pas s'empêcher de manger une banane à la fin de chaque kilomètre parcouru. Malgré cela, ce rusé a toujours réussi à amener au marché où sa mission se termine le maximum de bananes possible.

Dans les six cas suivants, trouvez le nombre de bananes amenées au marché par Babar.

Dans la colonne A, vous trouvez le nombre de bananes mises à disposition de Babar.

Dans la colonne B, vous avez la distance, en kilomètres, entre la bananeraie et le marché.

Dans la colonne C, les nombres représentent le nombre maximum de bananes que Babar est capable de transporter (dans sa jeunesse, il n'était pas très robuste ☺).

	A	B	C
a)	7	3	4
b)	18	5	6
c)	23	5	6
d)	23	3,2	6
e)	60	10	21
f)	3900	1000	1050

Solutions

Par la suite, les symboles suivants seront parfois utilisés : b = bananes, bm = bananes mangées, P = postes, T = tronçons, TR = traversées.

a) On peut imaginer que Babar prenne 4 bananes et les transporte directement au marché. Il en mange 1 au 1er km, 1 au 2ème km et 1 en arrivant au marché. Il lui serait alors impossible de retourner chercher la banane laissée au départ, car évidemment, il doit aussi se nourrir sur le chemin du retour. Cette stratégie lui permettrait d'amener 1 seule banane au marché.

L'idée est qu'il fasse des stocks intermédiaires de bananes sur son chemin. Supposons que Babar décide de constituer un stock à 2 km du départ. Il part avec 4 bananes, en mange une au 1er km, une autre au 2ème km, en laisse une au poste intermédiaire, car il doit prévoir en manger à nouveau une au 1er km. Comme il doit en manger une au départ, parmi les trois qu'il avait laissées, il repart avec deux bananes, en mange une au 1er km et une autre au 2ème km. Il doit continuer son voyage avec la seule banane laissée en stock lors de son 1er voyage. Cette banane est mangée au 3ème km. Dans ce cas, Babar ne peut amener aucune banane au marché. Cette stratégie n'est pas bonne.

Essayons de faire un stock après 1 km. Babar part avec 4 bananes. Il peut en poser 3 au 1er km. Il retourne chercher les 3 autres, en mange 1 au départ, part avec les 2 bananes restantes, en mange 1 au 1er km et en stocke 1. Il y a maintenant 4 bananes au 1er km. Babar prend les 4, va jusqu'au marché, en en mangeant 2 (1 au 2ème km et 1 au 3ème km). Il a pu amener **2 bananes** au marché. Chacun pourra vérifier avec la stratégie élaborée plus loin que c'est la bonne solution.

Une chose est certaine : lorsque le nombre de bananes stockées est inférieur ou égal au nombre de bananes que peut porter Babar, il n'y a plus lieu de constituer des stocks intermédiaires, car cela conduirait à rallonger le chemin, donc à manger plus de bananes.

En divisant la production totale de bananes par la charge maximale de bananes, on trouve le nombre de départs nécessaire pour déplacer toute la production. Ici, 7 : 4 = 1,75. Babar, pour déplacer toute sa production, est obligé de prendre les bananes en deux fois. Deux départs impliquent 3 TR sur le 1er tronçon.

Poussons le raisonnement un peu plus loin. Pour des raisons d'efficacité, on imagine bien qu'il faut faire des stocks intermédiaires et que Babar doit avancer par tronçons. S'il peut prendre toutes les bananes en 1 départ, il n'y aura qu'un seul tronçon dont la longueur est égale à la distance du départ au marché. S'il doit prendre 2 départs pour prendre toutes ses bananes, il doit faire 3 TR sur le 1er tronçon et 1 TR sur le 2ème tronçon. S'il doit prendre 3 départs pour prendre toutes ses bananes, il doit faire 5 TR sur le 1er tronçon, 3 TR sur le 2ème tronçon et 1 TR sur le dernier tronçon. Le tableau suivant résume la situation. Il peut être continué à l'infini. Selon la distance totale à parcourir, la ou les dernières traversées ne sont pas à effectuer.

		1er tr.	2ème tr.	3ème tr.	4ème tr.	5ème tr.
1 seul départ	1 seul tronçon	1 TR				
2 départs	2 tronçons	3 TR	1 TR			
3 départs	3 tronçons	5 TR	3 TR	1 TR		
4 départs	4 tronçons	7 TR	5 TR	3 TR	1 TR	
5 départs	5 tronçons	9 TR	7 TR	5 TR	3 TR	1 TR

b) Par la suite, dans tous les tableaux, à chaque poste (P), il sera donné le nombre de bananes se trouvant à ce poste et la distance restante pour aller de ce poste au marché. Pour chaque tronçon (T), on trouvera le nombre de traversées (TR), la longueur du tronçon et le nombre de bananes mangées (bm) sur le tronçon.

Comme il y a 18 bananes au départ en P1 et que Babar ne peut en porter que 6, il faudra qu'il prenne 3 départs pour déplacer toutes les bananes, ce qui fait 5 TR sur le 1er tronçon.

Sur ce 1er tronçon, il va manger 6 bananes, car il veut en laisser 12 en P2 (on verra plus loin que c'est la stratégie la plus efficace). Distance de P1 à P2 = 6 : 5 = 1,2 km. En P2, il reste 3,8 km pour aller au marché.

Pour déplacer les 12 bananes, à partir de P2, Babar a besoin de 3 TR sur le 2ème tronçon (T2). Sur ce tronçon, il va manger 6 bananes, puisqu'il veut en laisser 6 en P3. Distance de P2 à P3 = 6 : 3 = 2 km. En P3, il reste 1,8 km pour aller au marché.

Pour déplacer les 6 bananes de P3 à P4, Babar fait 1 TR de 1,8 km. Il mange 1 seule banane sur ce trajet.

P1	T1	P2	T2	P3	T3	P4
18 b 5 km	5 TR 1,2 km 6 bm	12 b 3,8 km	3 TR 2 km 6 bm	6 b 1,8 km	1 TR 1,8 km 1 bm	5 b

Babar a pu amener **<u>5 bananes</u>** au marché.

c) Voyons maintenant une stratégie valable pour tous les exercices de ce type.

Soit x = la quantité de bananes de la production, y = la charge maximale, en bananes, que peut porter Babar, et R = le reste de la division de x par y.

Dans notre exercice, on a x = 23, y = 6, et R = 5. En effet, $23 = 3 \cdot 6 + 5$.

Babar doit effectuer le plus court trajet possible tout en déplaçant le maximum de bananes. Ce double objectif pourra être réalisé avec la stratégie suivante :

1. Effectuer un déplacement minimal sur le 1er tronçon afin que les R bananes soient mangées sur ce tronçon, tout en ayant déplacé les x bananes du départ.

2. Sur chaque tronçon suivant, effectuer un déplacement minimal afin que y bananes soient mangées sur chaque tronçon, pour autant qu'il reste au moins y bananes.
3. Lorsqu'il reste moins de y bananes, en manger une partie sur le dernier tronçon à effectuer.

Pour déplacer les x bananes, Babar doit faire 7 TR sur T1. En effet, 23 : 6 ≅ 3,8 ⇒ 7 TR.

Sur ce tronçon, Babar veut manger R bananes, soit 5 bananes. Le déplacement minimal est alors de 0,714 km (5 : 7).

Babar se trouve en P2 avec 18 bananes. Il lui reste 4,286 km (5 – 0,714) à parcourir.

Sur T2, il doit déplacer 18 bananes, ce qui nécessite 3 départs (5 TR). Comme il veut manger 6 bananes sur ce tronçon, la longueur de ce tronçon sera de 1,2 km (6 : 5).

Babar se trouve en P3 avec 12 bananes. Il lui reste 3,086 km (5 – 1,914) à parcourir.

Sur T3, il doit déplacer 12 bananes, ce qui nécessite 2 départs (3 TR). Comme il veut manger 6 bananes sur ce tronçon, la longueur de ce tronçon sera de 2 km (6 : 3).

Babar se trouve en P4 avec 6 bananes. Il lui reste 1,086 km (5 – 3,914) à parcourir.

Babar prend les 6 bananes restantes, et en mange 1 sur le dernier tronçon.

Cela lui permet d'amener **5 bananes** au marché.

P1	T1	P2	T2	P3	T3	P4	T4	P5
23 b 5 km	7 TR 0,714 km 5 bm	18 b 4,286 km	5 TR 1,2 km 6 bm	12 b 3,086 km	3 TR 2 km 6 bm	6 b 1,086 km	1 TR 1,086 km 1 bm	5 b

d) Babar fait le même raisonnement qu'à l'exercice précédent, mais en tenant compte du fait que le marché est à 3,2 km. Il va se trouver en P3 avec 12 bananes, et à 1,286 km du marché. Le 3ème tronçon ne peut plus être de 2 km, car il ne reste plus que 1,286 km à parcourir. Le 3ème tronçon sera donc de 1,286 km, à parcourir 3 fois. Trois bananes seront mangées sur ce tronçon. Babar a pu amener **9 bananes** au marché.

P1	T1	P2	T2	P3	T3	P4
23 b 3,2 km	7 TR 0,714 km 5 bm	18 b 2,486 km	5 TR 1,2 km 6 bm	12 b 1,286 km	3 TR 1,286 km 3 bm	9 b

e) x = 60, y = 21, et R = 18. En effet, $60 = 21 \cdot 2 + 18$.

Pour déplacer les 60 bananes, Babar doit faire 5 TR sur le 1er tronçon. En effet, 60 : 21 ≅ 2,8 ⇒ 3 départs.

Sur le 1er tronçon, Babar veut manger R bananes, soit 18 bananes. Le déplacement minimal est de 3,6 km (18 : 5).

En P2, il y a 42 bananes, et le marché est à 6,4 km.

Sur T2, Babar doit déplacer 42 bananes, ce qui nécessite 2 départs (3 TR). Comme il veut manger 21 bananes sur ce tronçon, la longueur de ce tronçon sera de 7 km (21 : 3). Mais il ne reste plus que 6,4 km à parcourir. Il va donc effectuer 6,4 km par trois fois et manger 19 bananes ($6{,}4 \cdot 3 = 19{,}2$). Babar a pu amener **23 bananes** au marché.

P1	T1	P2	T2	P3
60 b 10 km	5 TR 3,6 km 18 bm	42 b 6,4 km	3 TR 6,4 km 19 bm	23 b

f) x = 3900, y = 1050, et R = 750. En effet, 3900 = 1050 · 3 + 750.

Pour déplacer les 3900 bananes, Babar doit effectuer 7 TR sur le 1er tronçon, car 3900 : 1050 ≅ 3,7 ⇒ 7 TR.

Sur T1, Babar veut manger 750 bananes. Le déplacement minimal est alors de 107,143 km (750 : 7).

En P2, il y a 3150 bananes et le marché est à 892,857 km.

Sur T2, Babar veut manger 1050 bananes. Il doit prendre 3 départs (5 TR) pour déplacer les 3150 bananes restantes. Le déplacement minimal est de 210 km (1050 : 5).

En P3, il y a 2100 bananes et le marché est à 682,857 km.

Sur T3, Babar veut manger 1050 bananes. Il doit prendre 2 départs (3 TR) pour déplacer les 2100 bananes restantes. Le déplacement minimal est de 350 km (1050 : 3).

En poursuivant le même type de raisonnement, on arrive à la conclusion que Babar peut amener **<u>718 bananes</u>** au marché.

P1	T1	P2	T2	P3	T3	P4	T4	P5
3900 b 1000 km	7 TR 107,143 km 750 bm	3150 b 892,857 km	5 TR 210 km 1050 bm	2100 b 682,857 km	3 TR 350 km 1050 bm	1050 b 332,857 km	1 TR 332,857 km 332 bm	718 b