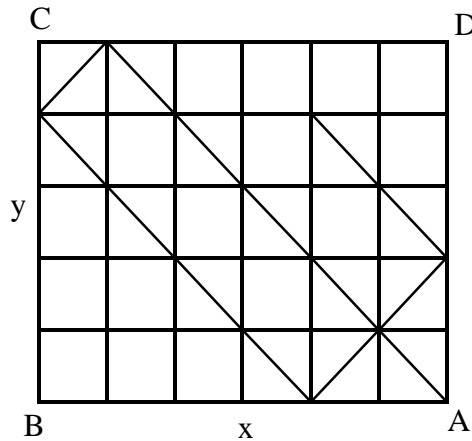


68. Les billards magiques * ** ***

Les billards magiques sont tous bordés d'un rectangle ABCD (les côtés de ce rectangle sont les bandes des billards) dans la même disposition que celui dessiné ci-dessous. Ils ont un petit trou à chacun des sommets A, B, C et D et sont entièrement quadrillés de carrés de 1 cm de côté. Une bille minuscule est projetée systématiquement de A, toujours dans la même direction (angle de 45 degrés avec la bande AB) et va rebondir contre les bandes jusqu'à ce qu'elle s'échappe par un des quatre trous. Les dimensions des billards sont données par les côtés x et y. Sur le croquis où une partie du tracé de la bille est dessinée, le billard mesure 6 cm par 5 cm, dimensions que l'on notera tout simplement (6 ; 5).



Trois questions sont posées pour chaque billard :

1. Quel est le nombre de carrés traversés par la bille avant de s'échapper ?
2. Combien de fois la bille a-t-elle touché les bandes avant de s'échapper ?
3. Par quel trou la bille va-t-elle s'échapper ?

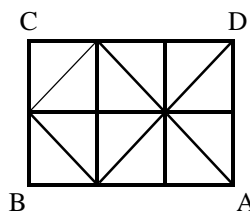
Répondez aux trois questions pour les billards dont les dimensions (x ; y) sont les suivantes :

- a) 3 cm par 3 cm.
- b) 3 cm par 2 cm.
- c) 2 cm par 5 cm.
- d) 6 cm par 5 cm.
- e) 9 cm par 6 cm.
- f) 14 cm par 8 cm.
- g) 24 cm par 44 cm.
- h) 324 cm par 252 cm.

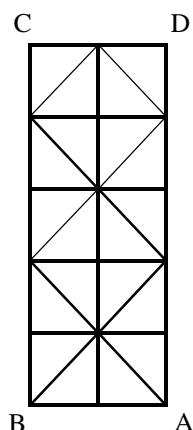
Après avoir résolu quelques exercices à l'aide de dessins, il faut chercher une méthode permettant de résoudre tous les problèmes de ce type sans passer par des dessins.

Solutions

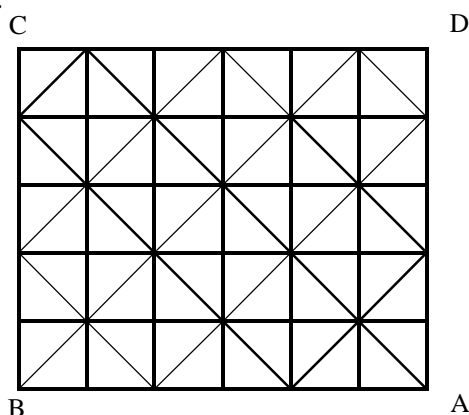
- a) Chacun peut vérifier à l'aide d'un petit dessin que la bille traverse 3 carrés, qu'elle ne touche aucune bande et qu'elle s'échappe par C.
- b) Le croquis suivant nous montre que la bille traverse 6 carrés, qu'elle touche 3 fois les bandes et qu'elle s'échappe par D.



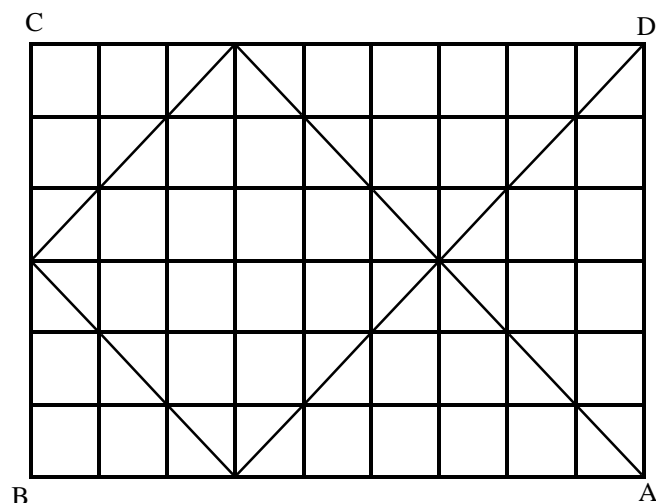
- c) Le croquis suivant nous montre que la bille traverse 10 carrés, qu'elle touche 5 fois les bandes et qu'elle s'échappe par B.



- d) Le croquis suivant nous montre que la bille traverse 30 carrés, qu'elle touche 9 fois les bandes et qu'elle s'échappe par B.



- e) Le croquis suivant nous montre que la bille traverse 18 carrés, qu'elle touche 3 fois les bandes et qu'elle s'échappe par D.



Ce n'est pas surprenant qu'il y ait des correspondances entre le billard (3 ; 2) et le billard (9 ; 6). Le billard (9 ; 6) a des dimensions trois fois plus grandes que le billard (3 ; 2). Dans les deux cas, la bille touche le même nombre de fois les bandes et s'échappe par le même trou. Cependant, le nombre de carrés traversés est trois fois plus grand pour le billard (9 ; 6) que pour le billard (3 ; 2).

f) Voici la méthode permettant de résoudre tous les problèmes de ce type :

Représentons les dimensions du billard (x ; y) sous forme de fraction $\frac{x}{y}$. Rendons cette frac-

tion irréductible : $\frac{x:p}{y:p} = \frac{m}{n}$ où p est le plus grand diviseur de x et y. $\text{Pgdc}(x ; y) = p$.

Appelons r, le nombre de fois que la bille touche les bandes.

Appelons s, le nombre de carrés traversés par la bille.

Appelons t, le trou par lequel s'échappe la bille.

L'observation de nombreux exercices de ce type nous permet d'établir les règles suivantes (les preuves mathématiques de leur justesse ne sont pas démontrées ici) :

$r = m + n - 2$	$s = \frac{x \cdot y}{\text{pgdc}(x; y)}$	t = C si m et n sont impairs
	$s = \frac{x \cdot y}{p}$	t = B si m est pair et n est impair t = D si m est impair et n pair

Le tableau suivant donne toutes les solutions des exercices.

	x	y	m	n	p	r	s	t
Question a	3	3	1	1	3	0	3	C
Question b	3	2	3	2	1	3	6	D
Question c	2	5	2	5	1	5	10	B
Question d	6	5	6	5	1	9	30	B
Question e	9	6	3	2	3	3	18	D
Question f	14	8	7	4	2	9	56	D
Question g	24	44	6	11	4	15	264	B
Question h	324	252	9	7	36	14	2268	C