

67. Les carrés gréco-latins * ** ***

Le grand mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) s'était interrogé sur une espèce de carrés magiques illustrés par les problèmes suivants.

- a) Supposons que l'on ait 9 officiers ayant 3 grades différents (A, B et C) appartenant à 3 régiments différents (1, 2 et 3). On pourrait alors attribuer à chacun un matricule : A1, B1, C1, A2, B2, C2, A3, B3, C3. Placez les neuf matricules de ces officiers dans le carré d'ordre 3 ci-dessous (un matricule par case) de telle manière que dans chaque ligne et dans chaque colonne, il n'y ait jamais de grades identiques et jamais de régiments identiques.

- b) Nous avons maintenant 16 officiers ayant 4 grades différents (A, B, C et D), et appartenant à 4 régiments différents (1, 2, 3 et 4). Placez les 16 matricules dans un carré d'ordre 4 en respectant les mêmes conditions qu'à l'exercice a).
- c) Résolvez le même problème avec 25 officiers ayant 5 grades différents et appartenant à 5 régiments différents.

Solutions

Pour chaque exercice, la solution donnée n'est pas unique.

a)

A1	B2	C3
B3	C1	A2
C2	A3	B1

b)

A1	B2	C3	D4
B3	A4	D1	C2
C4	D3	A2	B1
D2	C1	B4	A3

c)

A1	B2	C3	D4	E5
B3	C4	D5	E1	A2
C5	D1	E2	A3	B4
D2	E3	A4	B5	C1
E4	A5	B1	C2	D3

Seuls les carrés gréco-latins d'ordre 2 et 6 ne sont pas constructibles. Euler avait émis l'hypothèse (fausse) qu'il était impossible de construire des carrés gréco-latins d'un ordre double d'un ordre impair.

Un carré gréco-latin d'ordre impair peut toujours être construit de la manière suivante, illustrée avec l'exercice c) :

1. On remplit la première ligne et la première colonne dans l'ordre A - B - C - D - E.
2. On complète les autres lignes en gardant toujours l'ordre donné au point 1, en imaginant que lorsque l'on arrive au bout d'une ligne, on continue au début de cette même ligne.
3. Au A de la première ligne, on accole un 1 (A1). Au A de la deuxième ligne, on accole un 2 (A2). Au A de la troisième ligne, on accole un 3 (A3), etc.
4. On accole les nombres manquants en gardant toujours le même ordre : 1 - 2 - 3 - 4 - 5, en imaginant, comme au point 2, que lorsque l'on arrive au bout d'une ligne, on continue au début de cette même ligne.

Voici un carré gréco-latin d'ordre 7 :

A1	B2	C3	D4	E5	F6	G7
B3	C4	D5	E6	F7	G1	A2
C5	D6	E7	F1	G2	A3	B4
D7	E1	F2	G3	A4	B5	C6
E2	F3	G4	A5	B6	C7	D1
F4	G5	A6	B7	C1	D2	E3
G6	A7	B1	C2	D3	E4	F5

Le nom gréco-latin vient du fait que l'on utilisait souvent autrefois les lettres des alphabets grec et latin pour construire ces carrés. Les carrés gréco-latins sont utilisés à des fins pratiques dans la conception et l'analyse d'expériences statistiques, notamment en agronomie, en biologie, en médecine et en sociologie.