

66. Les bouteilles ** *** ****

Une entreprise souhaite fabriquer des bouteilles en verre qui soient très solides. Elle en est au stade expérimental et a fabriqué divers prototypes (A, B, C, D, E, F et G) qu'elle veut faire tester. Pour chaque prototype, elle a réalisé deux bouteilles parfaitement identiques du point de vue solidité.

Des personnes vont être chargées de tester les différents prototypes en recevant exactement deux bouteilles du prototype à tester. Elles doivent déterminer à partir de quelle hauteur la bouteille se casse, tout en faisant un minimum de tests. Les hauteurs à tester sont des nombres entiers de mètres. Une bouteille qui tombe sans se casser ne perd rien de sa solidité et peut donc être utilisée plusieurs fois. Il est possible qu'une bouteille ne se casse pas, quelles que soient les différentes hauteurs testées.

Pour chaque exercice ci-dessous, la question est la suivante : dans le cas le plus défavorable, quel est le nombre minimum de tests que chaque personne doit réaliser afin de déterminer à partir de quelle hauteur la bouteille se casse (si elle se casse) ?

- a) La première personne doit faire des tests sur des hauteurs allant de 1 à 3 mètres, avec deux bouteilles du prototype A.
- b) La deuxième personne doit faire des tests sur des hauteurs allant de 1 à 5 mètres, avec deux bouteilles du prototype B.
- c) La troisième personne doit faire des tests sur des hauteurs allant de 1 à 6 mètres, avec deux bouteilles du prototype C.
- d) La quatrième personne doit faire des tests sur des hauteurs allant de 1 à 10 mètres, avec deux bouteilles du prototype D.
- e) La cinquième personne doit faire des tests sur des hauteurs allant de 1 à 15 mètres, avec deux bouteilles du prototype E.
- f) La sixième personne doit faire des tests sur des hauteurs allant de 1 à 21 mètres, avec deux bouteilles du prototype F.
- g) La septième personne doit faire des tests sur des hauteurs allant de 1 à 400 mètres, avec deux bouteilles du prototype G.

Solutions

Il n'y a qu'une seule possibilité d'effectuer les tests, uniquement pour les exercices a), c), d), e) et f).

- a) Le premier test est fait à 2 m. Si la bouteille se brise, le second test se fera à 1 m. Si la bouteille se brise à 1 m, on saura qu'elle se brise à partir de 1 m. Si la bouteille ne se brise pas à 1 m, on saura que la bouteille se brise à partir de 2 m.

Si la bouteille ne n'est pas brisée à 2 m, le second test se fera à 3 m. Si la bouteille se brise à cette hauteur, on saura qu'elle se brise à partir de 3 m. Si elle ne se brise pas, on saura qu'elle ne se brise pas aux trois hauteurs à tester. Donc, **2 tests** sont nécessaires.

- b) Il faut un minimum de **3 tests**. Dans tous les tableaux suivants, on trouve dans la première colonne les hauteurs à tester et dans la première ligne le nombre de tests. Le premier test est fait à 3 m (X1). Si la bouteille se brise, on fait le 2ème test (avec la seconde bouteille natu-

rellement) à 1 m (X12). Si la bouteille se brise en X12, on sait que les bouteilles du prototype B se brisent à partir de 1 m. Si la bouteille ne se brise pas en X12, on fait le troisième test à 2 m (X121), ce qui nous permettra de savoir si elle se brise à partir de 2 m (la bouteille se brise en X121) ou à partir de 3 m (la bouteille ne s'est pas brisée en X121). Si la bouteille ne s'est pas brisée au premier test (X1), on fait le deuxième à 4 m (X11). Si la bouteille ne se brise pas, on fait le 3ème test à 5 m (X111). Si la bouteille ne se brise pas à 5 m, cela signifie qu'elle ne se brise jamais aux cinq hauteurs à tester.

Dans tous les tableaux, les chemins suivis sont indiqués de la manière suivante : X1 (premier test) sera suivi de X11 ou de X12 ou de X13, etc. Le test qui suit X12 ne peut être que X121 ou X122 ou X123, etc.

On constate également que si la bouteille se brise, on doit faire un test à une hauteur plus basse. Si elle ne se brise pas, on doit faire un test à une hauteur plus haute.

	1	2	3
5 m			X111
4 m		X11	
3 m	X1		
2 m			X121
1 m		X12	

- c) Il faut aussi un minimum de **3 tests**. Le premier test est fait à 3 m. Si la bouteille se casse, on effectue le test X12. Si la bouteille ne se casse pas en X12, on fait le test X121. Si après le premier test, la bouteille ne se casse pas, on continue avec le test X11, etc.

	1	2	3
6 m			X111
5 m		X11	
4 m			X112
3 m	X1		
2 m			X121
1 m		X12	

- d) Comme on peut le voir dans le tableau suivant, il faut un minimum de **4 tests**.

	1	2	3	4
10 m				X1111
9 m			X111	
8 m				X1112
7 m		X11		
6 m				X1121
5 m			X112	
4 m	X1			
3 m				X1211
2 m			X121	
1 m		X12		

e) Comme on peut le voir dans le tableau suivant, il faut un minimum de **5 tests**.

	1	2	3	4	5
15 m					X11111
14 m				X1111	
13 m					X11112
12 m			X111		
11 m					X11121
10 m				X1112	
9 m		X11			
8 m					X11211
7 m				X1121	
6 m			X112		
5 m	X1				
4 m					X12111
3 m				X1211	
2 m			X121		
1 m		X12			

f) On remarque dans l'exercice précédent que tant que la bouteille ne se brise pas, on fait des tests successifs aux hauteurs suivantes : 5, 9, 12, 14 et 15. Pour des hauteurs allant de 1 à 21m, les tests successifs tant que la bouteille ne se brise pas sont aux hauteurs suivantes : 6, 11, 15, 18, 20 et 21. Il faudra donc réaliser **6 tests**.

g) Construisons le tableau suivant :

Hauteurs maximales à tester	1	2 à 3	4 à 6	7 à 10	11 à 15	16 à 21	22 à 28	28 à 36	...
Nombre minimum de tests	1	2	3	4	5	6	7	8	...

Ce tableau peut être facilement prolongé à l'infini. Mais on peut chercher la relation liant le nombre minimum de tests aux hauteurs mises en gras dans le tableau précédent. Cette relation est $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$. On peut la trouver par la méthode des différences (voir rubrique E de mon site).

Faisons quelques essais :

$$f(40) = 820. f(30) = 465. f(28) = 406. f(27) = 378.$$

Il faut faire **28 tests**.

Remarque :

Hauteur maximale à tester	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	...
Hauteur du 1er test (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...