

64. Le petit taquin * **

Le taquin est un jeu bien connu créé aux Etats-Unis vers 1870 et qui se joue tout seul. Sam Loyd (1841-1911), considéré comme le plus grand inventeur américain de divertissements mathématiques, a rendu populaire ce jeu.

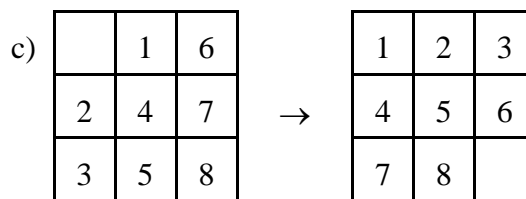
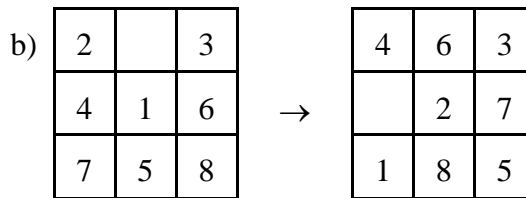
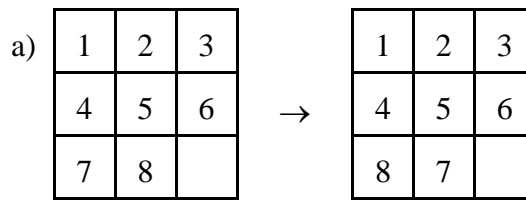
Le taquin est composé de 15 pièces numérotées de 1 à 15 glissant dans un cadre prévu pour 16 pièces. Le jeu consiste à passer d'une configuration donnée à une autre en déplaçant les pièces, verticalement ou horizontalement, sur la case vide. Le passage d'une configuration à une autre n'est pas toujours possible.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

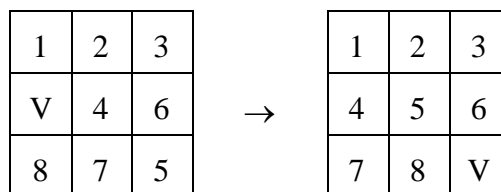
Au lieu de jouer avec un taquin habituel de 16 cases, nous allons le faire ici avec ce que j'appelle un petit taquin constitué de 9 cases.

Pour commencer, construisez un petit taquin en dessinant un carré de 9 cm de côté, à l'intérieur duquel vous dessinez 9 carrés de 3 cm de côté. Fabriquez ensuite 8 petits carrés cartonnés de 2 cm de côté (ce sont les pièces du jeu). Numérotez-les de 1 à 8.

- En respectant les règles du taquin, est-il possible de passer de la configuration de gauche à celle de droite ?



- Voici une méthode permettant de déterminer, sans manipuler les pièces, si on peut passer d'une configuration à une autre. Cette méthode exige au préalable de répondre à deux questions illustrées par l'exemple ci-dessous où la case vide est symboliquement remplacée par une pièce nommée V.



- Première question : De combien de cases doit se déplacer V pour passer de la configuration de départ à celle d'arrivée ? Pour répondre à cette question, il faut faire comme si V est une vraie pièce, seule sur le jeu, pouvant donc se déplacer librement. Dans notre exemple, V doit, au minimum, se déplacer de 3 cases (une possibilité est de descendre d'une case et d'avancer de deux cases vers la droite) pour atteindre son emplacement final. Il existe une infinité d'autres possibilités pour V d'atteindre sa position finale (V pourrait notamment passer plusieurs fois sur une même case), représentées toutes par un déplacement d'un nombre impair de cases.
- Seconde question : Combien faut-il faire d'échanges entre deux pièces pour passer de la configuration de départ à celle d'arrivée ? Ici, il faut oublier les règles du taquin. Nous avons maintenant le droit d'échanger les pièces les unes par-dessus les autres. Ainsi, on peut arriver à la position finale en faisant 3 échanges de pièces : on échange V avec 5, puis 4 avec 5 et 7 avec 8. Ici encore, il existe une infinité d'autres possibilités, toutes comptant un nombre impair d'échanges de pièces.

Reprenez maintenant les trois exercices du point 1, et répondez pour chaque cas (a, b et c) aux deux questions soulignées. Les réponses à ces questions permettent de dire s'il est possible de passer d'une certaine configuration à une autre. Essayez d'en découvrir la règle.

Solutions

1. C'est non pour a, oui pour b et non pour c.
2. Pour l'exercice a, la pièce V peut atteindre la position d'arrivée sans bouger (0 déplacement), elle peut le faire en 2 déplacements (une case sur la gauche, puis une case sur la droite), en 4 déplacements, etc. Le nombre de déplacements est toujours pair. On peut atteindre la position finale par un seul échange (pièces 7 et 8). Le nombre d'échanges est toujours impair.

	1ère question	Seconde question	Le jeu est...
Exercice a	0 ou 2 ou 4 ou 6,...	1 ou 3 ou 5 ou 7, ...	Impossible
Exercice b	2 ou 4 ou 6, ...	6 ou 8 ou 10... *	Possible
Exercice c	4 ou 6 ou 8, ...	7 ou 9 ou 11, ... **	Impossible

* Voici une possibilité : 8-5, 1-7, 6-7, V-6, V-2, 4-V.

** Voici une possibilité : 1-V, 2-V, 3-6, V-4, V-5, 6-7, V-8.

Règle :

Si les nombres correspondant aux réponses de la première et de la seconde question sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs, le jeu est possible. Si ce n'est pas le cas, le jeu est impossible. Cette règle est vraie pour tout jeu basé sur les mêmes règles que le taquin, avec un nombre de lignes par forcément égal au nombre de colonne.

Remarque :

Le fait de connaître si le jeu est possible ou non ne donne pas les clés pour y parvenir. En particulier, il faut une certaine habileté pour résoudre les jeux de taquin en un nombre minimum de mouvements.