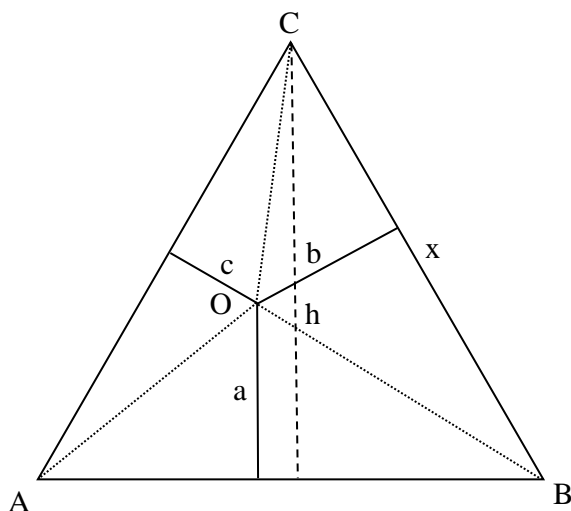


58. Le théorème de Viviani **

Le triangle ABC donné dans le croquis suivant est équilatéral. Appelons x son côté, et h sa hauteur. La distance du point O aux trois côtés du triangle est respectivement a , b et c .

- Calculez l'aire du triangle ABC, à partir de l'aire de chacun des triangles ABO, BCO et ACO.
- Calculez l'aire du triangle ABC, à partir de x et h .
- Que pouvez-vous déduire des résultats obtenus aux points a et b ?



Solutions

a) Aire de ABO = $\frac{x \cdot a}{2}$. Aire de BCO = $\frac{x \cdot b}{2}$. Aire de ACO = $\frac{x \cdot c}{2}$.

$$\text{Aire de ABC} = \frac{x}{2}(a + b + c).$$

b) Aire de ABC = $\frac{x \cdot h}{2}$.

- c) On peut déduire que $h = a + b + c$! (c'est le théorème de Viviani). Ceci est vrai quelle que soit la position du point O à l'intérieur du triangle équilatéral.

Vincenzo Viviani (1622 – 1703) est un mathématicien, physicien et astronome italien, disciple de Galilée.

Le théorème de Viviani peut être généralisé : dans un polygone régulier convexe à n côtés, la somme des distances d'un point O intérieur au polygone aux côtés du polygone est indépendante de la position du point O et elle est égale à n fois l'apothème (distance du segment joignant le centre du polygone au milieu d'un côté).