55. Les nombres cachés * ** ***

Albert et Benoît jouent avec les nombres naturels positifs (1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.).

Albert choisit un nombre naturel appelé nombre caché. Benoît veut le découvrir en annonçant un premier nombre. Albert ne peut répondre que par « Trop grand » ou « Trop petit » ou « Juste ». Si le premier nombre proposé par Benoît n'est pas juste, il en annoncera un 2ème et Albert répondra toujours par « Trop grand » ou « Trop petit » ou « Juste ». Et ainsi de suite, jusqu'à ce que Benoît trouve le nombre caché. Le but est de découvrir le nombre caché en annonçant un minimum de nombres. Chaque nombre annoncé par Benoît correspond à un coup.

a) Albert dit à Benoît que le nombre caché est inférieur à 5. De combien de coups, au minimum, Benoît a-t-il besoin pour découvrir à coup sûr le nombre caché ?
b) Albert dit à Benoît que le nombre caché est inférieur à 7. De combien de coups, au minimum, Benoît a-t-il besoin pour découvrir à coup sûr le nombre caché ?
c) Albert dit à Benoît que le nombre caché est inférieur à 9. De combien de coups, au minimum, Benoît a-t-il besoin pour découvrir à coup sûr le nombre caché ?
d) Albert dit à Benoît que le nombre caché est inférieur à 16. De combien de coups, au minimum, Benoît a-t-il besoin pour découvrir à coup sûr le nombre caché ?
e) Albert dit à Benoît que le nombre caché est inférieur à 32. De combien de coups, au minimum, Benoît a-t-il besoin pour découvrir à coup sûr le nombre caché ?
f) Albert dit à Benoît que le nombre caché est inférieur à n. De combien de coups, au minimum, Benoît a-t-il besoin pour découvrir à coup sûr le nombre caché ?

Solutions

a) Benoît sait que le nombre caché par Albert est l'un des quatre nombres suivants : 1, 2, 3, 4.

   Benoît commence par annoncer le nombre 2.

   - Si Albert dit « Juste », le nombre caché est 2.
   - Si Albert dit « Trop grand », Benoît sait que le nombre caché est 1.
   - Si Albert dit « Trop petit », Benoît annonce 3. Si Albert dit « Juste », alors le nombre caché est 3. Si Albert dit « Trop petit », alors Benoît annonce le nombre 4.

     Benoît a besoin de **<u>3 coups</u>** au minimum pour être sûr de découvrir le nombre caché.

     Note : Benoît aurait pu choisir d'autres coups pour découvrir le nombre caché. Il aurait pu, par exemple, commencer par annoncer le nombre 3.

b) Le nombre caché par Albert est l'un des nombres suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Il se trouve parmi six nombres. Dans tous les tableaux suivants, les nombres parmi lesquels se trouve le nombre caché sont mis dans la première ligne et les coups sont indiqués dans la première colonne.

   Benoît annonce 3. Si ce n'est pas le nombre juste, il continue en annonçant 2 ou 5 selon ce que dit Albert. Etc. Ici, il y a plusieurs stratégies possibles. Par exemple, Benoît aurait pu commencer par annoncer 4.

   Benoît a besoin de **<u>3 coups</u>** au minimum pour être sûr de découvrir le nombre caché.

	1	2	3	4	5	6
1			x			
2		x			x	
3	x			x		x

c) Le nombre caché se trouve parmi les nombres allant de 1 à 8. Il est donc caché parmi huit nombres. Le tableau suivant nous montre une stratégie possible pour découvrir le nombre caché. Au premier coup, Benoît annonce 4. Au 2ème coup, si 4 n'est pas juste, il annonce 2 ou 6, selon l'information donnée par Albert. Etc.

4 coups sont nécessaires, au minimum, pour être sûr de découvrir le nombre caché.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				x				
2		x				x		
3	x		x		x		x	
4								x

d) Le nombre caché se trouve parmi les nombres allant de 1 à 15. Il est donc caché parmi quinze nombres. Le tableau suivant nous montre la seule stratégie possible pour découvrir le nombre caché en un minimum de coups.

4 coups sont nécessaires, au minimum, pour être sûr de découvrir le nombre caché.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1								x							
2				x								x			
3		x				x				x				x	
4	x		x				x		x		x		x		x

e) Le nombre caché se trouve parmi 31 nombres (les nombres allant de 1 à 31). Le tableau précédent, dans l'exercice d), nous montre la stratégie nécessaire pour découvrir le nombre caché.

Le premier nombre annoncé doit être celui situé à égale distance des extrémités que sont les nombres 1 et 31. C'est le nombre 16. Selon l'information donnée par Albert, le 2ème nombre proposé, si 16 n'est pas le nombre juste, doit être 8 (nombre situé à égale distance de 1 et 15) ou 24 (nombre situé à égale distance de 17 et 31). Etc.

En fait, une fois situé le nombre du milieu (16), on utilise le même tableau qu'à l'exercice précédent si le nombre caché se trouve parmi les nombres allant de 1 à 15, et un tableau parfaitement symétrique au tableau de 1 à 15 si le nombre caché se trouve parmi les nombres allant de 17 à 31.

5 coups sont nécessaires, au minimum, pour être sûr de découvrir le nombre caché.

f) Le nombre caché est inférieur à n. Il se trouve donc parmi les nombres allant de 1 à n - 1.

Une méthode astucieuse permet de répondre à la question posée :

On prend le nombre n - 1. On le divise par 2. On divise le résultat par 2. On divise le nouveau résultat par 2. On continue ainsi qu'à ce que l'on obtienne un nombre inférieur à 1. Le nombre minimum de coups correspond au nombre de fois que l'on aura fait une division par 2.

Exemples :

n = 7 (exercice b). n – 1 = 6. 6 : 2 = 3, puis 3 : 2 = 1,5, puis 1,5 : 2 = 0,75. Réponse : 3 coups.

n = 9 (exercice c). n – 1 = 8. 8 → 4 → 2 → 1 → 0,5. Réponse : 4 coups.

n = 32 (exercice e). n – 1 = 31. 31 → 15,5 → 7,75 → 3,875 → 1,9375 → 0,96875 (5 coups).

n = 1001. n – 1 = 1000. 1000 → 500 → 250 →125 → 62,5 → 31,25 → 15,625 → 7,8125 → 3,90625 → 1,92 (environ) → 0,9 (environ) (10 coups).

On pourrait aussi faire le tableau suivant relativement aisé à construire.

a = Nombre de nombres parmi lesquels se trouve le nombre caché.

b = Nombre minimum de coups pour découvrir le nombre caché.

a	1	2 à 3	4 à 7	8 à 15	16 à 31	32 à 63	64 à 127	128 à 255	…
b	1	2	3	4	5	6	8	9	…

Appelons c, la plus grande valeur de a dans chaque colonne (c = 1, 3, 7, 15, 31, etc.).

On peut connaître c, à partir de b, par la formule $2^b - 1$. Exemple : b = 5, alors $2^5 - 1 = 31$.

On peut connaître b, à partir de c, par la formule $\frac{\log(c+1)}{\log 2}$.

Exemple : c = 31, alors $\frac{\log(31+1)}{\log 2} = 5$.