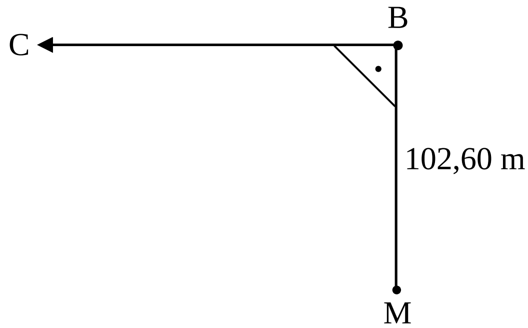
50. Médor poursuit son maître ***

L'énigme suivante est tirée d'un problème du génial Sam Loyd qui vécut de 1841 à 1911 et qui est considéré comme le plus grand inventeur américain de divertissements mathématiques. J'y ai apporté quelques modifications dans les mesures afin que les calculs soient un peu plus simples. N'étant pas capable de résoudre ce problème, j'ai fait appel à mes amis Gérard Charrière et Alain Rossier, experts en mathématiques. Loyd propose une méthode étrange de résolution qui aboutit au même résultat que Charrière et Rossier.

Le chien Médor est au point M, à 102,60 m de Bill, son maître, qui est au point B. Médor et Bill partent en même temps. Le chien va deux fois plus vite que son maître. Bill court en direction de C (BC est perpendiculaire à BM) et Médor court toujours en direction de son maître.

Quelle distance doit parcourir Médor pour rattraper son maître ?



Solution

Loyd prétend la chose suivante, étonnante, sans y apporter de justifications : le temps mis par Médor pour rattraper Bill est la moyenne entre le temps mis par Médor pour rattraper Bill si ce dernier s'éloigne de Médor, dans le même alignement qu'au départ, et le temps mis par Médor pour rattraper Bill si ce dernier vient à la rencontre de Médor. Dans les deux cas, le trajet de Bill et Médor est donc dans l'alignement de BM. Appliquons alors la méthode de Loyd :

1. Bill s'éloigne de Médor, On a deux équations :

$v = \frac{d - 102,60}{t} = x$ et $v_1 = \frac{d}{t} = 2x$. On en tire que $d - 102,60 = tx$ et $d = 2tx = 2\,(d - 102,60) = 2d - 205,20 \Rightarrow d = 205,20$ m.

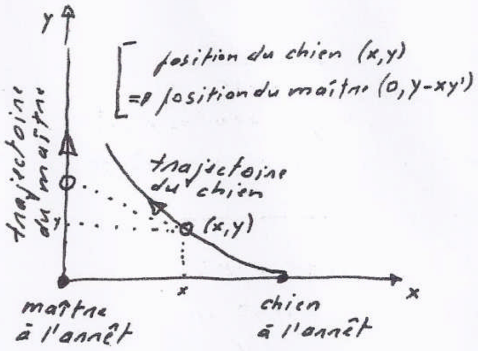
2. Bill va en direction de Médor. On a deux équations :

$v = \frac{102,60 - d}{t} = x$ et $v_1 = \frac{d}{t} = 2x$. On en tire que $102,60 - d = tx$ et $d = 2tx = 2\,(102,60 - d) = 205,20 - 2d \Rightarrow 3d = 205,20 \Rightarrow d = 68,40$ m.

Distance parcourue par le chien : $\frac{205,20 + 68,40}{2}$ = **<u>136,80 m</u>**.

Selon Charrière, ce problème est du type *Courbe de poursuite*. Voici, à la page suivante, la résolution qu'il propose :

v vitesse du maître $\qquad K = \frac{v}{w}$
w vitesse du chien



- Si $K > 1$ le chien ne rattrapera jamais le maître
- si $K = 1$ la distance chien-maître tend vers une limite
- si $K < 1$ le chien rattrape son maître

En supposant la distance entre chien et maître égale à 1 au départ on ne perd rien à la généralité, il suffira de faire un agrandissement (x 102,60)!

Il suffit donc de trouver l'équation de la trajectoire du chien, $y = f(x)$!

Ce n'est pas une mince affaire, mais après une longue trituration des méninges on obtient une équation différentielle qui caractérise la trajectoire du chien:

$x \cdot y'' = K \cdot \sqrt{1+y'^2}$ qui s'intègre, laborieusement,

(en séparant les variables on obtient $\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{K}{x}$)

et après quelques suées, youpi!

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - x^{(1-K)}}{1-K} - \frac{1 - x^{(1+K)}}{1+K} \right] \qquad \text{si } K \neq 1$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \left[x^2 - 2 \cdot Ln(x) - 1 \right] \qquad \text{si } K = 1$$

Si $K = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1 - x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2 - \sqrt{x}\,(3 - x)}{3}$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2}{3}$

la distance parcourue par le maître est donc

$\frac{2}{3} \cdot 102{,}60 = 68{,}4$ m ;

le chien courant deux fois plus vite que son maître aura donc parcouru $68{,}4 \cdot 2 = \underline{\underline{136{,}80 \text{ m}}}$.

Inspiré à la fois par Esope et Léonard de Vinci je propose d'intituler le problème
la chèvre d'Augustin et le loup de Savièse.

Avec toute mon amitié.
Gérard.
Mase, ce 21 novembre 2014.