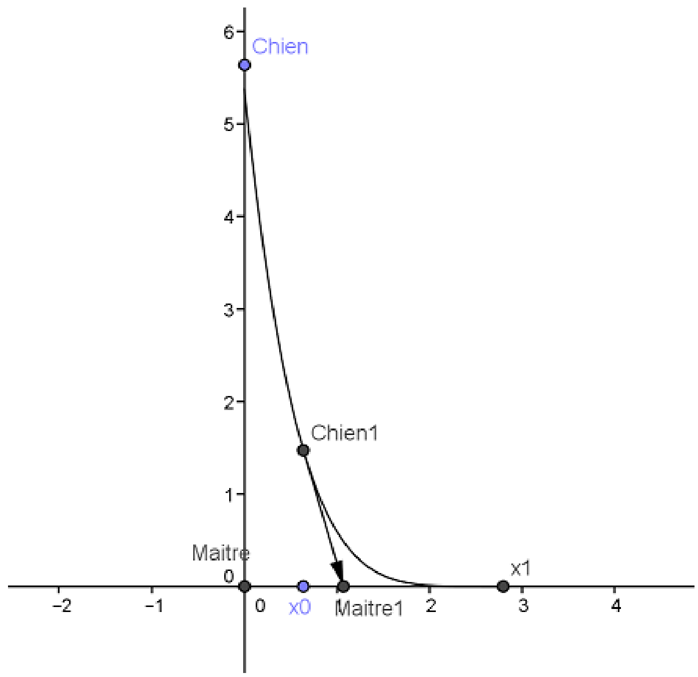
Alain Rossier 15.04.2015

# Résolution du problème du chien

Plaçons un système d'axe comme sur la figure ci-dessous et considérons la trajectoire du chien comme une fonction de $x$. Appelons-la $f$. Supposons que $f$ est deux fois dérivable. Par hypothèse, $f(0) = 102.6$




A un temps donné, le chien est à une position d'abscisse $x_0 \geq 0$, et donc d'ordonnée $f(x_0)$. Ainsi, le chien aura parcouru une distance de $\int_0^{x_0} \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$ par une formule de la longueur d'une courbe.
En ce qui concerne le maître, quand le chien est à une position $x_0$, le maître se trouve à l'intersection de la tangente à $f$ en $x_0$ et de l'axe des abscisses. En termes mathématiques, comme la tangente à une courbe est donné par $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, le maître se trouve à une position $(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0}, 0)$. Ainsi, il aura parcouru une distance de $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On en déduit l'égalité suivante vu que le chien va deux fois plus vite :

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t = 2 \cdot (x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)})$$

En dérivant par rapport à $x_0$, on obtient (on a remplacé $x_0$ par $x$ pour plus de consistance)

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = 2 \cdot (1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}) = \frac{2f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

En réarrangeant les termes de cette dernière égalité, on obtient

$$\frac{f'(x)}{2f(x)} = \frac{f''(x)}{f'(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}$$

En intégrant des deux côtés, et sachant que $\int \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \log(\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}) + c$, où c est une constante arbitraire, on obtient (log est le logarithme népérien)

$$\frac{1}{2}\log|f(x)| = \log|\frac{f'(x)}{1+\sqrt{1+f'(x)^2}}| + c$$

Soit maintenant $x_1 > 0$ minimal tel que $f(x_1) = 0$. Notre but est de trouver $2x_1$ car elle correspond à la distance parcourue par le chien avant de rencontrer son maître. Sur $]0, x_1[$, $f(x) > 0$ et $f$ est décroissante, donc $f'(x) \leq 0$. Ainsi, $|f'(x)| = -f'(x)$. En prenant l'exponentielle des deux côtés on obtient, avec $D = e^c > 0$,

$$\sqrt{f(x)} = \frac{-Df'(x)}{1+\sqrt{1+f'(x)^2}}$$

En isolant la racine pour pouvoir élever au carré, on a successivement

$$\sqrt{f(x)(1+f'(x)^2)} = -Df'(x) - \sqrt{f(x)}$$

$$f(x)(1+f'(x)^2) = D^2f'(x)^2 + 2Df'(x)\sqrt{f(x)} + f(x)$$

De plus, on sait que $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in ]0, x_1[$ car si $f$ a une pente nulle à un instant, cela voudrait dire que le chien se dirige parallèlement à l'axe des abscisses, et il n'y aurait aucun moyen que le maître se trouve sur cet axe. On peut donc simplifier par $f'(x)$ dans l'expression ci-dessus.

$$f(x)f'(x) = D^2f'(x) + 2D\sqrt{f(x)}$$

$$f'(x)(f(x) - D^2) = 2D\sqrt{f(x)}$$

Or, on remarque que $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ car le chien se dirige vers l'origine au début de sa course, avec une pente négative. En faisant tendre $x \to 0$ dans l'équation ci-dessus, si l'on note $L = f(0) = 102.6$, on a $f(0) - D^2 = \lim_{x\to 0} \frac{2D\sqrt{f(x)}}{f'(x)} = 0$, donc, comme $D > 0$, $D = \sqrt{f(0)} = \sqrt{L}$. et ainsi, en remaniant la dernière égalité, on obtient

$$\frac{1}{2D} f'(x)\sqrt{f(x)} - \frac{D}{2}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 1$$

En intégrant par rapport à $x$, il existe donc une constante $F$ telle que

$$\frac{1}{3D}\sqrt{f(x)^3} - D\sqrt{f(x)} = x + F$$

Ainsi, en faisant tendre tout d'abord $x \to 0$ dans cette dernière égalité, on obtient

$$F = \frac{1}{3D}\sqrt{L^3} - D\sqrt{L} = \frac{1}{3}L - L = -\frac{2L}{3}$$

car $D = \sqrt{L}$. Ainsi, en faisant tendre ensuite $x \to x_1$ dans l'égalité ci-dessus, comme $f(x_1) = 0$, on obtient $x_1 = -F = \frac{2L}{3}$. Or, $L = 102.6$, donc $x_1 = 68.4$

**Ainsi, la distance parcourue par le chien est de 136.8 mètres.**