41. Les bases * ** ****

Les nombres que nous utilisons tous les jours sont, à part de rares exceptions (notamment en informatique et en électronique), codés en base dix. Dans 8324, on a 8 milliers, 3 centaines, 2 dizaines et 4 unités. Ce système de représentation, dit décimal, utilise 10 chiffres (0 à 9) et est très ancien. Il découle du fait que nos deux mains comptent dix doigts.

Dans la colonne de gauche du tableau ci-dessous, nous avons les 20 premiers nombres entiers écrits en base 10. Dans la 2ème colonne (base 8), les nombres de la première colonne sont écrits en base 8. Pour les obtenir, on s'est contenté d'écrire les nombres en base 10, dans l'ordre croissant, mais en mais en éliminant les nombres qui contiennent des 8 et/ou des 9, car en base 8, seuls les chiffres de 0 à 7 sont admis.

En base 5, seuls les chiffres de 0 à 4 peuvent être utilisés. En base 3, seuls les chiffres de 0 à 2 peuvent être utilisés. Etc.

a) Complétez le tableau en transformant les nombres de la première colonne (base 10) en base 5, puis en en base 3 et enfin en base 2. Utilisez la méthode vue ci-dessus pour passer de la base 10 à la base 8.

Base 10	Base 8	Base 5	Base 3	Base 2
0	0			
1	1			
2	2			
3	3			
4	4			
5	5			
6	6			
7	7			
8	10			
9	11			
10	12			
11	13			
12	14			
13	15			
14	16			
15	17			
16	20			
17	21			
18	22			
19	23			
20	24			

Si vous avez complété correctement le tableau, vous constaterez que 20 en base 10 correspond à 24 en base 8, à 40 en base 5, à 202 en base 3 et à 10100 en base 2. C'est la manière la plus simple pour transformer des nombres de la base 10 en des nombres d'autres bases. Cette façon de procéder n'est pas pratique lorsque les nombres à transformer deviennent plus grands.

Avant d'aller plus loin, rappelons que le nombre 8324 (base 10) est égale à $8 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = \mathbf{8} \cdot 10^3 + \mathbf{3} \cdot 10^2 + \mathbf{2} \cdot 10^1 + \mathbf{4} \cdot 10^0 = 8000 + 300 + 20 + 4$.

Le même principe est appliqué pour toutes les bases. Supposons que l'on souhaite transformer le nombre 1983 (base 10) en base 5. On commence par calculer un certain nombre de puissances de 5.

$5^0 = 1$ $\quad 5^1 = 5$ $\quad 5^2 = 25$ $\quad 5^3 = 125$ $\quad 5^4 = 625$ $\quad 5^5 = 3125$

Comme $5^5 > 1983$, alors $1983 = a \cdot 5^4 + b \cdot 5^3 + c \cdot 5^2 + d \cdot 5^1 + e \cdot 5^0$ et le nombre cherché est abcde.

1983 : 625 = 3 (a = 3), avec un reste de 108. 108 : 125 = 0 (b = 0), avec un reste de 108.
108 : 25 = 4 (c = 4), avec un reste de 8. 8 : 5 = 1 (d = 1), avec un reste de 3.
3 : 1 = 3 (e = 3). Il n'y a plus de reste.
Alors, 1983 = $\mathbf{3} \cdot 5^4 + \mathbf{0} \cdot 5^3 + \mathbf{4} \cdot 5^2 + \mathbf{1} \cdot 5^1 + \mathbf{3} \cdot 5^0 = \mathbf{3} \cdot 625 + \mathbf{0} \cdot 125 + \mathbf{4} \cdot 25 + \mathbf{1} \cdot 5 + \mathbf{3} \cdot 1$.
Ainsi, 1983 (base 10) correspond à 30413 (base 5).

b) Transformez 2591 (base 10) en base 8.
c) Transformez 61 (base 10) en base 2.

Solutions

a) Voici le tableau :

Base 10	Base 8	Base 5	Base 3	Base 2
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	10
3	3	3	10	11
4	4	4	11	100
5	5	10	12	101
6	6	11	20	110
7	7	12	21	111
8	10	13	22	1000
9	11	14	100	1001
10	12	20	101	1010
11	13	21	102	1011
12	14	22	110	1100
13	15	23	111	1101
14	16	24	112	1110
15	17	30	120	1111
16	20	31	121	10000
17	21	32	122	10001
18	22	33	200	10010
19	23	34	201	10011
20	24	40	202	10100

b) $8^0 = 1$ $8^1 = 8$ $8^2 = 64$ $8^3 = 512$ $8^4 = 4092$
2591 : 512 = 5, avec un reste de 31.
31 : 64 = 0, avec un reste de 31.
31 : 8 = 3, avec un reste de 7.
7 : 1 = 7 (sans reste).
Alors, 2591 = $\mathbf{5} \cdot 8^3 + \mathbf{0} \cdot 8^2 + \mathbf{3} \cdot 8^1 + \mathbf{7} \cdot 5^0 = \mathbf{5} \cdot 512 + \mathbf{0} \cdot 64 + \mathbf{3} \cdot 8 + \mathbf{7} \cdot 1$.
Ainsi, 2591 (base 10) correspond à **<u>5037</u>** (base 8).

c) $2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$ $2^6 = 64$.
Alors 61 = $\mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0$.
Ainsi, 61 (base 10) correspond à **<u>111101</u>** (base 2).

– Augustin Genoud, octobre 2014 –