4. La chèvre ***

Une chèvre est attachée par une corde à un pieu fixé en un point de la circonférence d'un pré circulaire de 10 m de rayon. Pour quelle longueur de corde, la chèvre pourra-t-elle brouter la moitié de l'herbe du pré ?

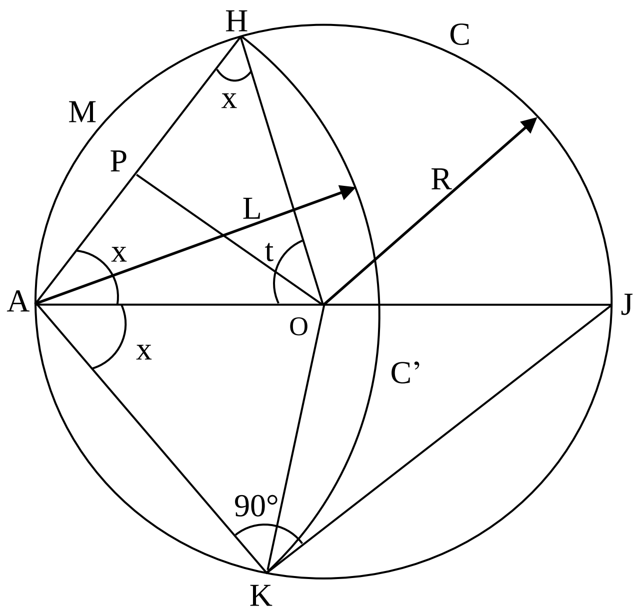
Solution

On peut trouver la solution de multiples manières. En voici une dans laquelle les angles sont pris en radians. Si vous avez oublié ce que sont les radians, regardez l'exercice 29.
Profitons de rappeler que, par définition, un angle (en radians) est le rapport entre l'arc d'un cercle et son rayon. Ainsi, dans le croquis ci-dessous, t (en radians) = $\frac{M}{R}$, M étant la longueur de l'arc AH.

Par exemple, un angle de 180 degrés est équivalent à π radians$\left(\frac{2\pi R}{2} : R\right)$.

R = rayon du pré O = centre du pré A = endroit où est fixé le pieu
L = Longueur de la corde C = circonférence du pré

On trace l'arc de cercle C' de centre A et de rayon L qui coupe C en H et K. J est le point diamétralement opposé à A sur C. P est la projection orthogonale de O sur le segment AH.



S1 = aire du secteur HAK du cercle C'.

S2 = aire du secteur HOK du cercle C.

S3 = aire du quadrilatère AHOK.

Aire cherchée S = S1 + S2 – S3.

Selon la formule de l'aire d'un secteur circulaire,

S1 = $\frac{1}{2}L^2 \cdot 2x = L^2 \cdot x$.

Cos x = $\frac{AK}{AJ} \Rightarrow AK = AJ \cdot \cos x$.

Comme AK = L et AJ = 2R, on a L = $2R \cdot \cos x$.

Alors S1 = $4R^2 \cdot \cos^2 x \cdot x$.

S2 = $\frac{1}{2}R^2 \cdot 2t = R^2 t$. Comme t = $\pi - 2x$, S2 = $R^2 (\pi - 2x)$.

S3 = $2 \cdot OP \cdot AP$. Comme sin x = $\frac{OP}{R} \Rightarrow OP = R \cdot \sin x$.

Comme cos x = $\frac{AP}{R} \Rightarrow AP = R \cdot \cos x$. Alors, S3 = $2R \cdot \sin x \cdot R \cdot \cos x = 2R^2 \cdot \cos x \cdot \sin x$.

S = S1 + S2 – S3 = $4R^2 \cdot x \cdot \cos^2 x + R^2 (\pi - 2x) - 2R^2 \cdot \cos x \cdot \sin x$.

D'où l'équation $4R^2 \cdot x \cdot \cos^2 x + R^2 (\pi - 2x) - 2R^2 \cdot \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow$ (en simplifiant par R^2) $4x \cdot \cos^2 x + \pi - 2x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow 4x \cdot \cos^2 x - 2x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x = -\frac{1}{2}\pi \Rightarrow$

$-4x \cdot \cos^2 x + 2x + 2 \cdot \cos x \cdot \sin x = \dfrac{1}{2}\pi \Rightarrow 2 \cdot \cos x \cdot \sin x - 2x\,(2 \cdot \cos^2 x - 1) = \dfrac{1}{2}\pi \Rightarrow$

$\sin(2x) - 2x\,(2 \cdot \cos^2 x - 1) = \dfrac{1}{2}\pi.$

Posons $y = 2x$, alors $\sin y - y\,\left(2 \cdot \cos^2 \dfrac{y}{2} - 1\right) = \dfrac{1}{2}\pi = \sin y - y \cdot \cos y$.

y, qui est l'angle HAK, est compris entre 0 et π. La fonction $f(y) = \sin y - y \cdot \cos y$ est continue et strictement croissante sur $(0, \pi)$ et $f(0) = 0$ et $f(\pi) = \pi$.

L'équation $f(y) = \dfrac{1}{2}\pi$ admet donc une seule solution dans $(0, \pi)$. Avec un outil de calcul, on trouve que $y \cong 1{,}9056957\ldots$

On en déduit que $L/R \cong \dfrac{2R \cdot \cos x}{R} = 2 \cdot \cos x = 2 \cdot \cos \dfrac{y}{2} \cong 1{,}1587284\ldots$

Si $R = 10$ m $\Rightarrow L \cong 11{,}58$ m.

La corde doit faire environ **11,58 mètres**.