38. Les modulos * ** ***

a) Quel est le reste de la division de 19 par 4 ?
b) Quel est le reste de la division de 51 par 4 ?
c) Quel est le reste de la division de 403 par 4 ?
d) Quel est le reste de la division de 4499 par 4 ?
e) Quel est le reste de la division de 1'827'155 par 4 ?
f) Quelle remarque pouvez-vous faire en comparant les solutions de tous les exercices précédents ?

   Avant d'aller plus loi, regardez les solutions des exercices effectués jusqu'ici et la brève partie théorique qui suit ces solutions.
g) Calculez 19 (mod 9), puis 20 (mod 7), puis 30 (mod 6), puis 53 (mod 8).
h) Les modulos 9 sont souvent utiles. Trouvez une technique pour calculer le plus rapidement possible 2'835'967'345 (mod 9).
i) La preuve par 9 pour les multiplications découle des propriétés mathématiques des modulos. Utilisez-la pour les trois multiplications suivantes :

   1) $48 \cdot 7 = 346$.

   2) $375 \cdot 91 = 34'125$.

   3) $3872 \cdot 584 = 2'251'348$.
j) Le 1er septembre 2014 était un lundi. Quel jour de la semaine était le 1 janvier 2016 ?
k) Neuf chiffres, tous différents, ont été utilisés pour écrire deux nombres entiers dont la somme est égale à 26'868. Quel chiffre n'a pas été employé pour écrire ces deux nombres ?

Solutions

a) 3
b) 3
c) 3
d) 3
e) 3
f) Les solutions sont toutes identiques.

   <u>Définitions et notations</u> : soit a et b, deux entiers, et n, un entier naturel non nul. On dit que a est **congru** à b modulo n si et seulement si a − b est divisible par n. On écrit $a \equiv b$ (mod n) ou $a \equiv b$ (modulo n).

   Il découle de cette définition que si l'on divise a par n et b par n, on obtient le même reste.

   Exemple : $51 \equiv 19$ (mod 4), car $51 - 19 = 32$, et 32 est divisible par 4. On peut aussi dire que le reste de la division de 51 par 4 est 3, de même que le reste de la division de 19 par 4.

   Ainsi, 19, 51, 403, 4499 et 1'827'155 sont congrus à 3 modulo 4.

   On écrit 19, 51, 403, 4499 et 1'827'155 $\equiv 3$ (mod 4).
g) $19 \equiv 1$ (mod 9) car le reste de la division de 19 par 9 est égal à 1.
   $20 \equiv 6$ (mod 7) car le reste de la division de 20 par 7 est égal à 6.

$30 \equiv 0 \pmod 6$ car le reste de la division de 30 par 6 est égal à 0.
$53 \equiv 5 \pmod 8$ car le reste de la division de 53 par 8 est égal à 5.

h) Une des techniques pour calculer le plus rapidement possible 2'835'967'345 (mod 9) consiste à éliminer les 9 et les groupes de chiffres dont la somme donne 9. On peut donc ici éliminer le 9, puis 5 et 4, puis 6 et 3, puis 2 et 7. Il ne reste que 835 dont la somme des chiffres est égale à 16. La somme des chiffres de 16 donne 7. Alors $2'835'967'345 \equiv 7 \pmod 9$.

i) La preuve est dite par 9 car elle nécessite des calculs avec les modulos 9 :

1) De $48 \equiv 3 \pmod 9$ et de $7 \equiv 7 \pmod 9$, on effectue $3 \cdot 7 = 21 \equiv 3 \pmod 9$. Comme $346 \equiv 4 \pmod 9$, on en conclut que cette multiplication est fausse car $3 \pmod 9 \neq 4(\bmod 9)$.

2) De $375 \equiv 6 \pmod 9$ et de $91 \equiv 1 \pmod 9$, on effectue $6 \cdot 1 = 6 \equiv 6 \pmod 9$. Comme $34125 \equiv 6 \pmod 9$, peut-on conclure que cette multiplication est correcte ? Et bien non. En fait, ce résultat est bien juste ici mais la preuve par 9 ne peut pas le prouver comme vous pourrez le constater dans l'exercice suivant.

3) De $3872 \equiv 2 \pmod 9$ et de $584 \equiv 8 \pmod 9$, on effectue $2 \cdot 8 = 16 \equiv 7 \pmod 9$. Comme $2'251'348 \equiv 7 \pmod 9$, on peut croire que cette multiplication est juste. Et pourtant elle est fausse. Le résultat correct est 2'261'248.

Conclusion : la preuve par 9 ne garantit pas l'exactitude d'un résultat. Elle peut seulement nous assurer qu'un résultat est faux. Cette preuve n'est donc pas très intéressante.

j) Du 2 septembre 2014 au 1 septembre 2015, il y a 365 jours.
Du 2 septembre 2015 au 1er janvier 2016, il y a 122 jours (29 + 31 + 30 + 31 + 1).
Du 1er septembre 2014 au 1er janvier 2016, il y a 487 jours.
$487 \equiv 4 \pmod 7$. Comme le 1er septembre 2014 était un lundi, le 1er janvier 2016 sera un **vendredi** (4 jours de la semaine après le lundi).

k) La preuve par 9 est aussi valable pour l'addition et, dans ce cas, c'est bien pratique.

$26'868 \equiv 3 \pmod 9$. Or, $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \equiv 0 \pmod 9$. Il nous faut obtenir 3 (mod 9). Comme $39 \equiv 3 \pmod 9$, le seul chiffre pouvant être éliminé est **6**. En effet, $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 39$.

Voici une somme possible : 17'843 + 9025 = 26'868.

Remarque :

Voici, à l'aide de deux exemples, une autre manière de rechercher les modulos, surtout intéressante lorsque l'on travaille avec des nombres négatifs :

Premier exemple. Pour calculer 134 (mod 8), on cherche le multiple de 8 qui est le plus proche de 134, et inférieur à 134. C'est 128. Ensuite, il suffit de calculer l'écart, en valeur absolue, entre 134 et 128. Cet écart est 6. Alors, $134 \pmod 8 \equiv 6$.

Second exemple. Pour calculer $-134 \pmod 8$, on cherche le multiple de 8 qui est le plus proche de -134, et inférieur à -134. C'est -136. Ensuite, il suffit de calculer l'écart, en valeur absolue, entre 134 et 136. Cet écart est 2. Alors, $-134 \pmod 8 \equiv 2$.

Il est aussi pratique de savoir que $-134 \pmod 8 + 134 \pmod 8 = 0 \pmod 8$.

– Augustin Genoud, septembre 2014 –