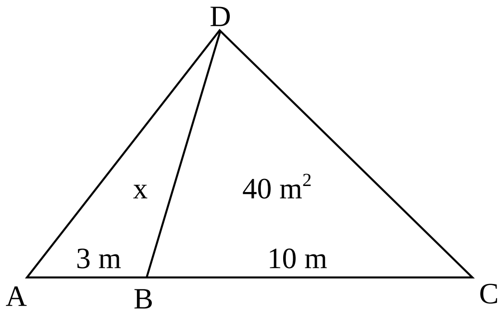
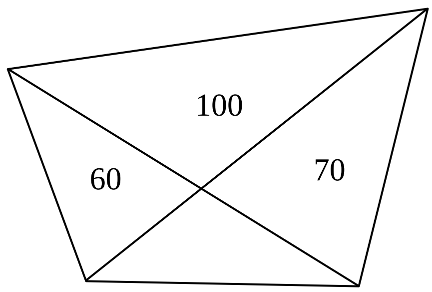
37. Recherche d'aires ** * ******

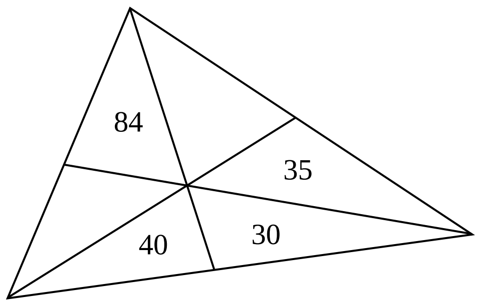
a) Dans le croquis ci-contre, on donne les mesures des côtés AB et BC ainsi que l'aire du triangle BCD. Quelle est l'aire x du triangle ABD ?



b) Dans le croquis ci-contre, chaque nombre représente, en m^2, l'aire du petit triangle dans lequel il se trouve. Quelle est l'aire totale de la figure ?



c) Dans le croquis ci-contre, chaque nombre représente, en m^2, l'aire du petit triangle dans lequel il se trouve. Quelle est l'aire totale de la figure ?



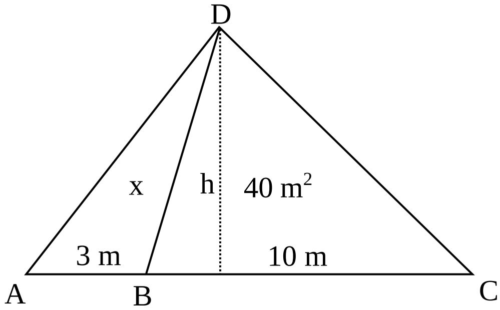
Solutions

Dans tous les croquis, certaines lettres représentent des segments et d'autres des aires. Si c'est évident, il ne sera pas précisé lesquelles sont des segments et lesquelles sont des aires.

a) Dessinons le segment h qui est à la fois hauteur du triangle ABD et du triangle BCD.

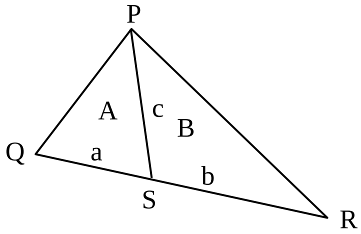
Aire de BCD = $\frac{10 \cdot h}{2} = 40 \Rightarrow$ h = 8 m.

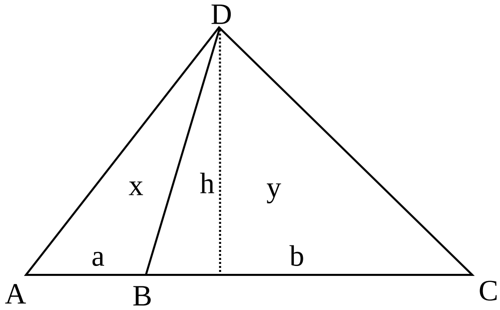
Alors, aire de x = $\frac{3 \cdot 8}{2}$ = **<u>12 m²</u>**.



Rappelons ici une petite règle qui est souvent utile dans les concours de jeux mathématiques et logiques : le rapport des aires de deux triangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.

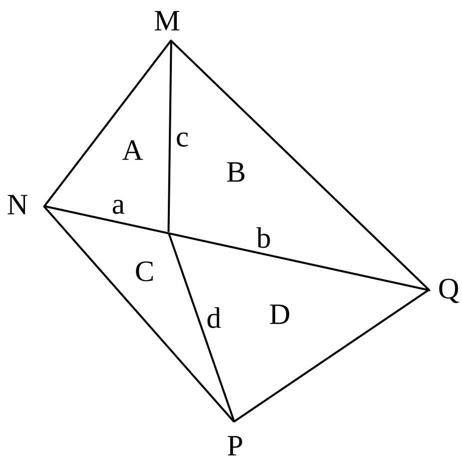
Autrement dit, lorsqu'un triangle PQR est partagé par un segment (c) issu d'un de ses sommets, on a la relation suivante : $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$.





Preuve : Aire du triangle ABD = x = $\frac{a \cdot h}{2}$. Aire du triangle BDC = y = $\frac{b \cdot h}{2}$. Alors, $\frac{x}{y} = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{a}{b}$.

Ainsi, l'exercice a) aurait pu être résolu alors grâce à la relation suivante $\frac{3}{10} = \frac{x}{40}$, dont la solution est immédiate.



Regardons encore le croquis ci-contre dans lequel les segments a et b sont alignés, ce qui n'est pas le cas des segments c et d.

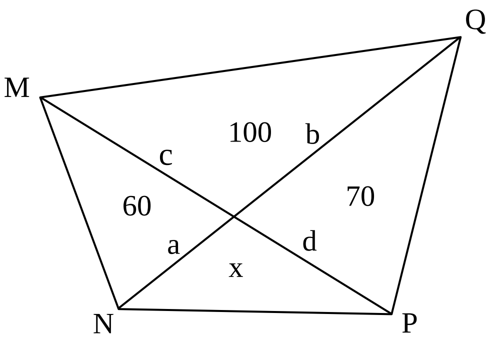
Le triangle MNQ est coupé par le segment c issu de M ⇒ $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$.

Le triangle NPQ est coupé par le segment d issu de P ⇒ $\frac{a}{b} = \frac{C}{D}$.

Alors, $\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \neq \frac{c}{d}$ (c et d ne sont pas alignés)

b) Le triangle MNQ est coupé par le segment c issu de M $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{60}{100}$.

Le triangle NPQ est coupé par le segment d issu de P $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{70}$.



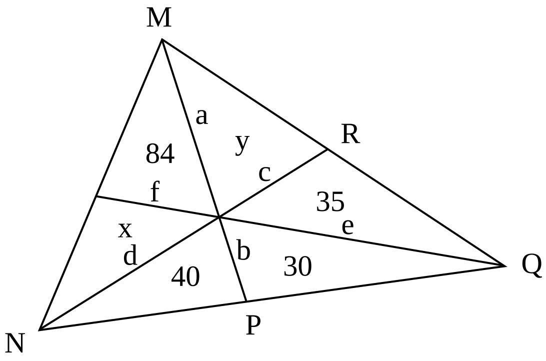
Alors, $\frac{a}{b} = \frac{60}{100} = \frac{x}{70} \Rightarrow x = 42\ m^2$.

Aire totale : 60 + 100 + 70 + 42 = **<u>272 m²</u>**.

c) En appliquant toujours la même stratégie, il est facile d'obtenir deux équations à deux inconnues.

Le triangle MNP est coupé par le segment d issu de N

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{84+x}{40}$.



Le triangle MPQ est coupé par le segment e issu de Q

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{y+35}{30}$.

Le triangle MNR est coupé par le segment a issu de M

$\Rightarrow \dfrac{c}{d} = \dfrac{y}{84+x}$.

Le triangle NQR est coupé par le segment e issu de Q

$\Rightarrow \dfrac{c}{d} = \dfrac{35}{40+30}$.

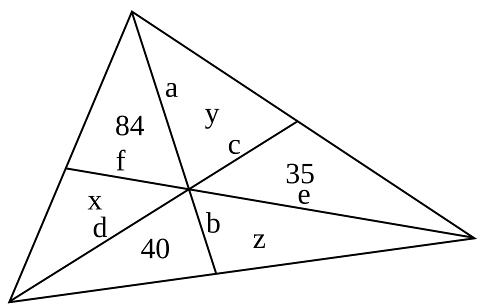
Alors, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{84+x}{40} = \dfrac{y+35}{30} \Rightarrow 30x - 40y = -1120 \Rightarrow 3x - 4y = -112$ (a),

et $\dfrac{c}{d} = \dfrac{y}{84+x} = \dfrac{35}{40+30} \Rightarrow 35x - 70y = -2940 \Rightarrow -2x + 4y = 168$ (b)

De (a) + (b), on obtient x = 56. Et ensuite y = 70.

Aire totale : 84 + 40 + 30 + 35 + 56 + 70 = **315 m^2**.

Notons encore qu'il est possible de trouver l'aire des trois plages manquantes (x, y et z) du croquis ci-contre.



On obtient un système de trois équations à trois inconnues dont la résolution est difficile (merci à la personne qui pourrait me la fournir) :

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{84+x}{40} = \dfrac{y+35}{z}$

2. $\dfrac{c}{d} = \dfrac{y}{84+x} = \dfrac{35}{40+z}$

3. $\dfrac{e}{f} = \dfrac{y+35}{84} = \dfrac{40+z}{x}$