

34. Les boules * ** *** *****

Voici un grand classique des énigmes mathématiques. Il s'agit de repérer, parmi un certain nombre de boules qui paraissent identiques, celle qui diffère de toutes les autres par une masse légèrement différente. Il faut aussi pouvoir dire si cette boule est plus légère ou plus lourde que les autres. Pour résoudre ce problème, on ne dispose que d'une balance double, dite de Roberval, que l'on ne veut utiliser qu'un minimum de fois.



Dans les trois premiers exercices ci-dessous, trouvez la méthode qui permet de repérer la boule différente, de dire si elle est plus lourde ou plus légère que les autres, et d'indiquer le nombre minimum de fois qu'est utilisée la balance double, dans le pire des cas.

Pour le quatrième exercice (120 boules), déterminez seulement le nombre de fois qu'il faut utiliser, au minimum, la balance double pour repérer la boule différente, et pour dire si elle est plus lourde ou plus légère que les autres.

1. La boule différente se trouve parmi 3 boules.
2. La boule différente se trouve parmi 4 boules.
3. La boule différente se trouve parmi 12 boules.
4. La boule différente se trouve parmi 120 boules.

Solutions

Par souci de simplification, on écrira 1er coup pour première utilisation de la balance, 2ème coup pour 2ème utilisation de la balance, etc. Il y a souvent plusieurs manières de procéder pour déterminer la boule différente. On n'en donnera qu'une. Les boules dites neutres sont celles parmi lesquelles ne se trouve pas la boule de masse différente.

1. Numérotions les boules : 1, 2 et 3. On commence par mettre la boule 1 sur le plateau de gauche et la boule 2 sur le plateau de droite. Trois cas peuvent se présenter :
 - 1.1. La balance penche à gauche. Alors, la boule différente est la 1 (plus lourde) ou la 2 (plus légère) et la boule 3 est neutre. On utilise une seconde fois la balance en mettant à gauche la boule 1 et à droite la boule 3. Si la balance penche à gauche, la boule différente est la 1 (plus lourde). Si la balance reste en équilibre, la boule différente est la 2 (plus légère).
 - 1.2. La balance penche à droite. Alors, la boule différente est la 1 (plus légère) ou la 2 (plus lourde) et la boule 3 est neutre. On utilise une seconde fois la balance en mettant à gauche la boule 1 et à droite la boule 3. Si la balance penche à droite, la boule différente est la 1 (plus légère). Si la balance reste en équilibre, la boule différente est la 2 (plus lourde).
 - 1.3. La balance reste en équilibre. C'est la 3 qui est différente et les boules 1 et 2 sont neutres. On utilise une seconde fois la balance en mettant à gauche la boule 1 et à droite la boule 3. Si la balance penche à gauche, c'est la 3 qui est plus légère. Si la balance penche à droite, c'est la 3 qui est plus lourde.

Il faut donc utiliser **deux fois** la balance.

2. Numérotions les boules : 1, 2, 3, 4. Divers essais nous prouveront qu'il n'y a pas de solution en deux coups. Voyons une solution en trois coups.

2.1. On procède comme dans l'exercice 1 au début (cas 1.1 et 1.2), en mettant la boule 1 à gauche et la boule 2 à droite. Les boules 3 et 4 sont neutres.

2.2. La balance reste en équilibre. C'est la 3 ou la 4 qui est différente. Comme en 1.3, on va comparer une première fois la boule 3 à une boule neutre (1 ou 2) et la boule 4 à une boule neutre.

Il faut utiliser **trois fois** la balance.

3. Numérotions à nouveau les boules : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Utilisons les couleurs suivantes lorsque c'est utile :

La boule la plus lourde est parmi les grises.

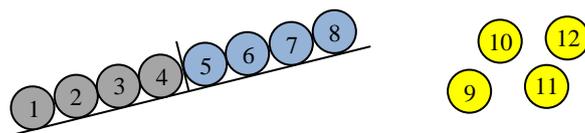
La boule la plus légère est parmi les bleues.

Les boules en jaune sont les boules neutres.

On commence par mettre les boules 1, 2, 3 et 4 à gauche de la balance, et les boules 5, 6, 7 et 8 à droite.



3.1. La balance penche à gauche. La boule recherchée est parmi les boules grises et bleues :



2ème coup : on place les boules selon le schéma suivant :



3.1.1. La balance penche à gauche : c'est la boule 1 ou 2 qui est plus lourde ou la boule 6 qui est plus légère.

3ème coup : on met la 1 d'un côté de la balance et la 2 de l'autre. Si la balance penche du côté de 1, c'est la boule 1 qui est plus lourde. Si la balance penche du côté de 2, c'est la 2 qui est plus lourde. Si la balance reste en équilibre, c'est la 6 qui est plus légère.

3.1.2. La balance penche à droite : c'est la 3 qui est plus lourde ou la 5 qui est plus légère.

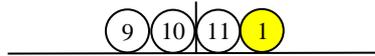
3ème coup : on compare la 3 avec une boule neutre, la 9 par exemple. Si la balance ne reste pas en équilibre, c'est la 3 qui est plus lourde. Si la balance reste en équilibre, c'est la 5 qui est plus légère.

3.1.3. La balance est en équilibre. La boule différente est parmi la 4 (grise), la 7 (bleue) ou la 8 (bleue). Le 3ème coup est analogue au point 3.1.1. vu un peu plus haut.

3.2. La balance penche à droite. La boule recherchée est parmi les boules 5, 6, 7 et 8 (lourdes) et 1, 2, 3, 4 (légères). On peut la déterminer par un raisonnement analogue au 2ème coup de 3.1.

3.3. La balance reste en équilibre. La boule différente est parmi les boules 9, 10, 11 et 12. Ici, contrairement à l'exercice 2, on peut s'appuyer sur des boules neutres (1 à 8).

2ème coup : on place les boules selon le schéma suivant :



3.3.1. La balance penche à gauche. Une des boules 9 et 10 est plus lourde ou la boule 11 est plus légère. On détermine la boule différente en mettant sur la balance (3ème coup) les boules 9 et 10. Si la balance penche, la boule différente est celle du côté qui penche. Si la balance reste en équilibre, la boule différente est la 11.

3.3.2. La balance penche à droite. Une des boules 9 et 10 est plus légère ou la boule 11 est plus lourde. On détermine la boule différente par un raisonnement analogue au paragraphe précédent, en mettant sur la balance (3ème coup) les boules 9 et 10.

3.3.3. La balance est en équilibre. C'est la boule 12 qui est différente. On la compare (3ème coup) à une boule neutre pour déterminer si elle est plus lourde ou plus légère.

Il faut utiliser **trois fois** la balance.

4. La relation entre le nombre minimum d'utilisation d'une balance (nombre de coups k) permettant de déterminer la boule de masse différente parmi n boules est donné par :

$3^k \geq 2n + 2$ (k doit être le plus petit possible). On peut alors construire le tableau suivant :

Nombre de boules	3	4 à 12	13 à 39	40 à 120
Nombre de coups	2	3	4	5

Il faut un minimum de **5 pesées** pour déterminer la boule différente parmi 120 boules.

Exemples :

- Si $n = 39$, alors $2n + 2 = 80$. Alors k minimum = 4 car $3^4 = 81$.
- Si $n = 40$, alors $2n + 2 = 82$. Alors k minimum = 5 car $3^5 = 243$.