**3. Les carrés magiques **  *****

Soit un carré composé lui-même d'un certain nombre de cases carrées ayant toutes la même grandeur. Ce **carré** est dit **magique**, lorsqu'après avoir mis un seul nombre dans chacune des cases, la somme des nombres de chaque ligne (horizontale), de chaque colonne (verticale) et des deux diagonales (principales) est toujours la même. Cette somme est appelée **densité**.

Un **carré** magique est dit **normal** lorsque les nombres qui le composent sont des nombres entiers positifs consécutifs commençant par 1.

L'**ordre** d'un carré magique est le nombre de lignes (ou de colonnes) qui le composent. Un carré magique d'ordre 3 contient forcément 9 nombres.

Dans les exercices qui suivent, il est conseillé de vérifier les solutions après chaque exercice.

1. Quelle est la densité d'un carré magique normal d'ordre 3 ? Construis-en un.
2. Construis un carré magique d'ordre 3 ne contenant que des nombres pairs allant de 10 à 26.
3. Ce carré magique normal d'ordre 4 est étonnant. Pourquoi ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 7 | 14 |
| 15 | 6 | 9 | 4 |
| 10 | 3 | 16 | 5 |
| 8 | 13 | 2 | 11 |

4. Construis deux carrés magiques d'ordre 4 composés de nombres entiers positifs multiples de 5 dont le plus petit est 5.
5. Quelle est la densité d'un carré magique normal d'ordre 5 ? Construis-en un.
6. Quelle est la densité d'un carré magique contenant 81 nombres impairs consécutifs dont le plus petit est 13 ?

**Solutions**

1. Somme des 9 neuf nombres de ce carré magique : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.
   Ces neuf nombres doivent se répartir dans les 3 lignes et la somme dans chaque ligne doit être identique (par définition d'un carré magique). La densité est donc égale à 15 (45 : 3). Maintenant, il faut trouver 8 additions (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales) formées de 3 nombres dont la somme est 15. Cherchons tous les cas possibles :
   1 + 5 + 9 = 15 1 + 6 + 8 = 15 2 + 4 + 9 = 15 2 + 5 + 8 = 15
   2 + 6 + 7 = 15 3 + 4 + 8 = 15 3 + 5 + 7 = 15 4 + 5 + 6 = 15
   Il y a 8 cas possibles (bien entendu, les nombres, dans chaque addition peuvent être permutés), ce qui est intéressant car il nous fallait trouver 8 additions. Observons le carré ci-dessous à gauche. Le e va se retrouver 4 fois dans nos additions (1 ligne, 1 colonne et 2 diagonales). Or, seul le 5 apparaît 4 fois dans nos cas possibles. Donc, e = 5. Les a, c, g et i se retrouvent 3 fois. Ils correspondent forcément aux nombres 2, 4, 6 et 8. Les b, d, f et h apparaissent 2 fois, ce sont les nombres 1, 3, 7, 9. Essayons 2, 9 et 4 dans la première ligne.

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

La suite du carré magique se construit aisément. Il existe 7 autres carrés magiques normaux d'ordre 3 qui peuvent tous être obtenus à partir de celui que nous avons trouvé, en effectuant

des rotations ou des symétries. En voici deux (les deux de droite). C'est pourquoi, on peut considérer qu'il n'y a qu'un seul carré magique normal d'ordre 3.
Bien entendu, on peut trouver ce carré magique uniquement par tâtonnements.
Relevons qu'à des rotations ou symétries près, le nombre de carrés magiques normaux est de 0 dans le cas d'un ordre 2, de 1 pour le cas d'un ordre 3, de 880 pour le cas d'un ordre 4 et de 275'305'224 pour le cas d'un ordre 5.

2. On pourrait faire exactement les mêmes recherches qu'à l'exercice précédent. Mais il existe une méthode plus simple. Notons ci-dessous à gauche le premier carré magique trouvé dans l'exercice précédent. Remplaçons ensuite (carré magique à droite ci-dessous) le 1 par 10, le 2 par 12, le 3 par 14, le 4 par 16 et ainsi de suite et nous obtenons le carré magique demandé (densité = 54).

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 26 | 16 |
| 22 | 18 | 14 |
| 20 | 10 | 24 |

Cette technique consistant à utiliser un carré magique pour en résoudre un autre peut souvent être utilisée. La preuve peut être apportée en notant x le plus petit nombre du carré magique de départ, t, l'écart entre le plus petit des nombres des deux carrés magiques (dans notre exemple, t = 9 = 10 – 1), et n, l'écart entre chaque nombre du carré magique à trouver (2 dans notre exemple). Dans le carré magique de départ, 1 est remplacé par x + t, 2 par x + t + n, 3 par x + t + 2n, 4 par x + t + 3n, etc. On peut vérifier ainsi que toutes les sommes valent 3x + 3t + 12n.

3. Ce carré magique (densité = 34) est dit « diabolique » car si l'on partage ce carré en deux rectangles égaux ou inégaux, par une ligne verticale ou horizontale, le carré demeure magique après échange des deux rectangles (un exemple est donné dans le second carré magique ci-contre, la première ligne étant passée en dernière ligne. Cela signifie qu'un nombre quelconque du carré magique peut occuper une case quelconque du carré magique.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 7 | 14 |
| 15 | 6 | 9 | 4 |
| 10 | 3 | 16 | 5 |
| 8 | 13 | 2 | 11 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 6 | 9 | 4 |
| 10 | 3 | 16 | 5 |
| 8 | 13 | 2 | 11 |
| 1 | 12 | 7 | 14 |

Ce carré magique a encore d'autres propriétés : les neuf carrés formés de 4 cases ont tous une somme correspondant à la densité (exemples : 34 = 1 + 12 + 15 + 6 = 12 + 7 + 6 + 9 = 9 + 4 + 16 + 5, etc.). On voit aussi que 1 + 14 + 8 + 11 = 34.

4. Utilisons la même technique qu'à l'exercice 2. A partir du carré magique de l'exercice 3 (celui de gauche), remplaçons le 1 par 5, le 2 par 10, le 3 par 15, etc. Nous obtenons le carré magique suivant, à gauche, dont la densité est 170 (5 fois 34). On obtient le carré magique de droite (densité = 320) en remplaçant le 1 par 5, le 2 par 15, le 3 par 25, etc.

Ces deux carrés magiques sont aussi « diaboliques ».

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 60 | 35 | 70 |
| 75 | 30 | 45 | 20 |
| 50 | 15 | 80 | 25 |
| 40 | 65 | 10 | 55 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 115 | 65 | 135 |
| 145 | 55 | 85 | 35 |
| 95 | 25 | 155 | 45 |
| 75 | 125 | 15 | 105 |

Profitons pour montrer comment construire un des 880 carrés magiques normaux d'ordre 4 : on construit le carré de gauche non magique avec les nombres écrits dans un ordre croissant. Les nombres des deux diagonales sont ensuite inversés. Dans une des diagonales, le 1 et le 16 sont inversés, ainsi que le 6 et le 11. On fait la même chose avec la seconde diagonale et on obtient le carré magique normal de droite.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 2 | 3 | 13 |
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 4 | 14 | 15 | 1 |

5. La somme des nombres entiers positifs allant de 1 à 25 est égale à 325. **<u>La densité vaut 65</u>** (325 : 5).
La fonction suivante permet de trouver la densité de tous les carrés magiques normaux d'ordre n : $\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$. Si n = 5, on a $\frac{5\left(5^2+1\right)}{2}$= 65.
On a vu à l'exercice 1 qu'il y a un peu plus de 275 millions de carrés magiques normaux d'ordre 5. Avec un peu de chance et d'obstination, vous en avez certainement trouvé un.
Il existe de nombreuses méthodes pour construire des carrés magiques. En voici une qui permet de construire des carrés magiques d'ordre impair, méthode parfois utilisée par des magiciens.

<u>Règle générale</u> :
Il faut construire les cases du carré magique (ici d'ordre 5) ainsi que quelques cases touchant le carré magique sur la partie du haut et de droite, comme indiqué sur la figure suivante, en jaune, bleu et orange (case A).
Le 1 doit toujours être placé tout à droite sur la ligne du milieu de notre carré magique. Les nombres suivants doivent aller dans la case au-dessus et à droite du nombre précédent.
Lorsque les nombres sortent du carré magique, ils vont dans la ligne du bas s'ils sont dans une case jaune (déplacement vertical), ils vont dans la colonne de gauche s'ils sont dans une case bleue (déplacement horizontal).
Si une case est déjà occupée, le nombre doit aller à côté du nombre précédent, à sa gauche. La case orange A doit être considérée comme une case occupée.

<u>Exemple</u> : mettons le 1 dans la seule case où il doit aller dans cette méthode. Le 2 va devoir aller au-dessus et à droite du 1. Il arrive dans une case bleue. Il est alors déplacé horizontalement tout à gauche.

Le 3 va au-dessus et à droite du 2. Le 4 va au-dessus et à droite du 3. Il arrive dans une case jaune. Il est alors déplacé verticalement tout en bas.

Le 5 va au-dessus et à droite du 4. Le 6 devrait aller au-dessus et à droite du 5, mais la case est occupée par le 1. Il doit alors aller juste à gauche du 5. On continue ainsi…

Le 16 devrait aller dans la case A qui est considérée comme une case occupée. Il doit être mis juste à gauche du 15. Avec un peu d'entraînement, on peut facilement construire ainsi des carrés magiques d'ordre impair (pas forcément normaux), sans dessiner les cases qui sortent du carré magique et cela impressionnera les observateurs.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 4 | 23 | 17 | A |
| 9 | 3 | 22 | 16 | 15 | 9 |
| 2 | 21 | 20 | 14 | 8 | 2 |
| 25 | 19 | 13 | 7 | 1 | 25 |
| 18 | 12 | 6 | 5 | 24 | 18 |
| 11 | 10 | 4 | 23 | 17 | |

6. Comme on a 81 nombres, il s'agit d'un carré magique d'ordre 9. Le plus petit nombre est 13. Ils sont tous impairs.

   Le 2ème est 15 ($13 + 1 \cdot 2$). Le 3ème est 17 ($13 + 2 \cdot 2$). Le 4ème est 19 ($13 + 3 \cdot 2$). Le 5ème est 21 ($13 + 4 \cdot 2$). Le 81ème est 173 ($13 + 80 \cdot 2$).

   Pour connaître la densité, il nous faut faire d'abord l'addition suivante : $13 + 15 + 17 + \ldots + 169 + 171 + 173 = (13 + 171) + (15 + 169) + (17 + 167) + (19 + 165) + \ldots. + 173$. Comme il y a 81 nombres, on a groupé 40 paires, chacune ayant une somme de 184 et on a mis tout seul le nombre 173. La somme cherchée vaut alors $40 \cdot 184 + 173 = 7533$. La densité vaut 837 (7533 : 9).

   Voici ci-dessous ce carré magique construit selon la méthode vue à l'exercice 5. Il peut être construit en moins de 5 minutes.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81 | 61 | 41 | 21 | 163 | 143 | 123 | 103 | 101 |
| 59 | 39 | 19 | 161 | 141 | 121 | 119 | 99 | 79 |
| 37 | 17 | 159 | 139 | 137 | 117 | 97 | 77 | 57 |
| 15 | 157 | 155 | 135 | 115 | 95 | 75 | 55 | 35 |
| 173 | 153 | 133 | 113 | 93 | 73 | 53 | 33 | 13 |
| 151 | 131 | 111 | 91 | 71 | 51 | 31 | 29 | 171 |
| 129 | 109 | 89 | 69 | 49 | 47 | 27 | 169 | 149 |
| 107 | 87 | 67 | 65 | 45 | 25 | 167 | 147 | 127 |
| 85 | 83 | 63 | 43 | 23 | 165 | 145 | 125 | 105 |