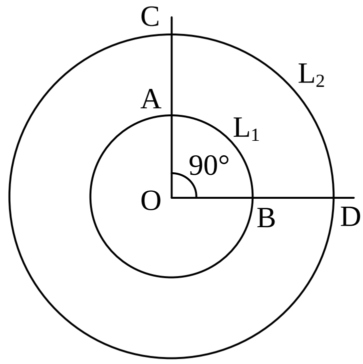
29. Les radians ** ***

Un arc de cercle est une partie d'un cercle comprise entre deux points.

Dans le croquis ci-contre, O est le centre du cercle. L'arc de cercle L_2 d'extrémités C et D est appelé arc de cercle intercepté par l'angle de 90 degrés. L_1 est l'arc de cercle d'extrémités A et B.

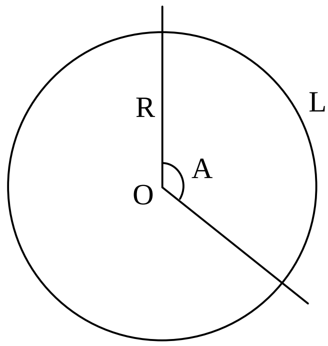


Le rayon OA mesure 1 cm, et le rayon OC est égal à 2 cm.

a) Calculez L_1 divisé par son rayon.
b) Calculez L_2 divisé par son rayon.
c) L_3 est un arc de cercle correspondant à un angle de 90° et à un rayon R. Calculez L_3 divisé par son rayon.
d) Que remarquez-vous en comparant les réponses de a, b et c. Est-ce étonnant ?
e) Calculez le périmètre d'un cercle de rayon R divisé par son rayon ?

Dans le croquis suivant, O est le centre du cercle, et L est l'arc intercepté par l'angle A.

Par définition, tout angle A (en radians) est défini ainsi : $A = \frac{L}{R}$. On donne à cet angle le nom de radian (rad). Pour des raisons pratiques (surtout en trigonométrie), les mathématiciens utilisent cette manière de faire pour calculer des angles autrement qu'en degrés. La relation entre les angles en degrés et les angles en radians est proportionnelle.



f) A combien de radians correspond un angle de 90 degrés ?
g) A combien de radians correspond un angle de 360 degrés ?
h) A combien de radians correspond l'angle intérieur d'un triangle équilatéral ?
i) A combien de degrés correspond un angle d'1 radian ?
j) A combien de radians correspond un angle qui délimite un arc de cercle d'une longueur égale au rayon de ce cercle ?

Solutions

a) L_1 divisé par son rayon = $\frac{2\pi \cdot 1}{4} : 1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cong$ **<u>1,57</u>**.

b) L_2 divisé par son rayon = $\frac{2\pi \cdot 2}{4} : 2 = \frac{4\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \cong$ **<u>1,57</u>**.

c) L_3 divisé par R = $\frac{2\pi \cdot R}{4} : R = \frac{\pi \cdot R}{2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\pi}{2} \cong$ **<u>1,57</u>**.

d) Les réponses de a), b) et c) sont identiques. Ce n'est pas étonnant, car, pour un angle donné, la relation entre la mesure d'un arc et son rayon est proportionnelle.

e) Périmètre d'un cercle de rayon R divisé par son rayon = $\frac{2\pi \cdot R}{R} = 2\pi \cong$ **<u>6,28</u>**.

Remarquons qu'il n'y a pas d'unités aux solutions des exercices a, b, c et e, car ce sont des résultats de divisions de deux longueurs.

f) Le calcul est identique à l'exercice c), mais comme il s'agit maintenant d'un angle, il faut simplement ajouter l'unité. Alors, 90° = $\frac{\pi}{2}$ rad $\cong$ **<u>1,57 rad</u>**.

g) Le calcul est identique à l'exercice e). Alors, 360° = 2π $\cong$ **<u>6,28 rad</u>**. On constate que la mesure d'un angle en radians varie de 0 à 2π.

h) L'angle intérieur d'un triangle équilatéral mesure 60°. Comme il vaut le 6ème de 360°, on a alors 60° = $\frac{2\pi}{6}$ rad $= \frac{\pi}{3}$ rad $\cong$ **<u>1,05 rad</u>**.

i) Comme 360° = 2π rad, alors, 180° = π rad ⇒ 1 rad = 180/π ≅ **<u>57</u>**°.

j) Il s'agit tout simplement de calculer $\frac{R}{R}$. Alors, l'angle qui délimite un arc de cercle d'une longueur égale au rayon du cercle est **<u>1 rad</u>**. Comme on l'a vu à l'exercice i), cet angle correspond à environ 57 degrés.

En appelant A, l'angle cherché, on aurait pu trouver ces 57 degrés en résolvant l'équation suivante : $\frac{2\pi R}{360} \cdot A = R \Rightarrow A = \frac{180}{\pi} \cong 57°$.