

23. Les triplets de Pythagore **

- a) Construis en grandeur réelle un triangle de dimensions 4,5 cm, 6 cm et 7,5 cm. A quoi ressemble-t-il ?
- b) Soit $m = 4,5^2$, $n = 6^2$ et $p = 7,5^2$. Calculez m , n et p (réponses en nombres décimaux). Effectuez $m + n$. Que constatez-vous ?
- c) On appelle triplet de Pythagore, un ensemble de trois nombres entiers naturels (a , b , c) liés par la relation $a^2 + b^2 = c^2$. Ce triplet est appelé primitif si a , b , et c sont premiers entre eux.

Par définition, deux ou plusieurs nombres sont dits *premiers entre eux* si et seulement si leur plus grand diviseur commun (PGDC) est 1.

Il existe une infinité de triplets primitifs de Pythagore. Il est facile de les trouver par la méthode attribuée au mathématicien Diophante qui vécut à Alexandrie au début de notre ère : Soit d et e , deux nombres entiers positifs, premiers entre eux, de parité différente (ils ne peuvent pas être tous les deux pairs ou tous les deux impairs), avec $d < e$. Les triplets cherchés sont obtenus de la manière suivante : $(e^2 - d^2, 2ed, e^2 + d^2)$.

Quels sont les triplets primitifs obtenus à partir des couples suivants qui représentent d et e ?

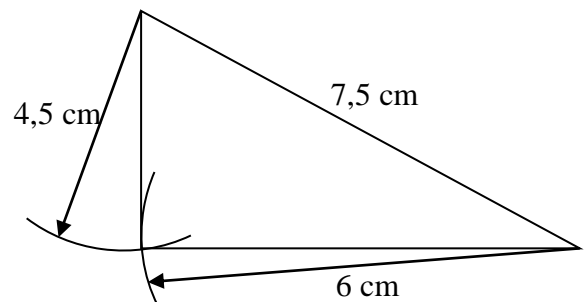
- c1) 1 et 2.
c2) 1 et 4.
c3) 2 et 3.
c4) 3 et 8.
c5) 5 et 6.

Il existe de nombreuses propriétés appartenant aux triplets primitifs.

- c6) Que peut-on dire des nombres pairs dans les triplets primitifs ?
c7) Que peut-on dire des multiples de 5 dans les triplets primitifs ?

Solutions

- a) Pour construire le triangle, il faut dessiner un des côtés, puis faire des arcs de cercle comme indiqué sur le croquis ci-contre :



Ce triangle ressemble à un triangle rectangle.

- b) **$m = 20,25$; $n = 36$; $p = 56,25$ et $m + n = 56,25 = p$.** Dans ce cas, selon le théorème de Pythagore que nous verrons un peu plus loin, notre triangle de départ est bien un triangle rectangle.

Pythagore fut un mathématicien et philosophe grec qui vécut aux environs de 550 avant Jésus-Christ. Le théorème de Pythagore lui fut attribué alors qu'il n'a jamais rien écrit et que les propriétés de ce théorème étaient connues plus de 1000 ans avant sa naissance.

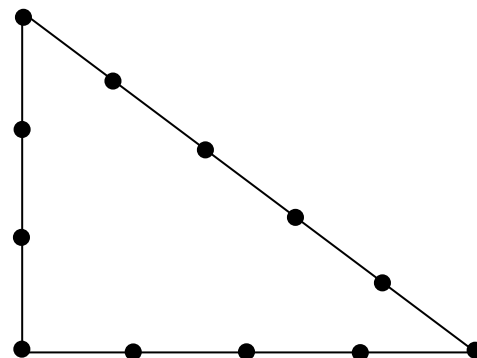
Les côtés adjacents à l'angle droit (a et b) sont appelés cathètes et le côté opposé à l'angle droit (c) est l'hypoténuse.

Le théorème de Pythagore énonce ceci : $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow$ triangle rectangle.

Autrement dit, lorsque la somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au carré du troisième côté, alors nous avons affaire à un triangle rectangle. De la même manière, pour tout triangle rectangle, la somme des carrés des deux côtés les plus petits est égale au carré du plus grand des côtés.

Le triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm est le plus illustre triangle rectangle dont les mesures sont des nombres entiers (en multipliant chacun des côtés de cet illustre triangle par 1,5 on trouve le triangle qui nous a servi d'exemple).

Autrefois, une corde de 13 nœuds (le dernier étant superposé au premier) placés à égale distance le long d'une corde permettait d'obtenir des angles droits lors de diverses constructions.



c1) $e^2 - d^2 = 3$, $2ed = 4$, $e^2 + d^2 = 5$. D'où le triplet primitif **(3, 4, 5)**.

c2) **(15, 8, 17)**.

c3) **(5, 12, 13)**.

c4) **(55, 48, 73)**.

c5) **(11, 60, 61)**.

c6) **Dans chaque triplet primitif, il y a toujours un et un seul nombre pair. Ce nombre pair est un multiple de 4 et c'est le deuxième terme du triplet.**

c7) **Dans chaque triplet primitif, il y a toujours un et un seul multiple de 5.**