

203. Le concours * * * * *

Un concours organisé régulièrement par un magazine contient un certain nombre de questions dont les réponses correctes valent chacune 1 point. Des coefficients sont attribués à toutes les réponses correctes. Les coefficients ont la même valeur numérique que le numéro de la question. Ainsi, la question 17 a un coefficient de 17.

Grâce à un ordinateur, chaque concurrent, en fonction de ses réponses, reçoit un score dont la partie de gauche correspond à la somme des points obtenus et la partie de droite, à la somme des coefficients, avec un séparateur entre les deux parties. Par exemple, le score 7-84 signifie qu'un concurrent a répondu correctement à 7 questions et obtenu une somme de coefficients valant 84.

Note : le cas 0-0 (aucune réponse juste) est compté comme un score.

- a) Lors d'un concours comportant 5 questions, Ambroise n'a répondu correctement qu'aux questions 1, 3 et 5.
Quel score a-t-il obtenu ?
- b) Dans un concours comportant 3 questions, combien de scores différents sont possibles ?
- c) Dans un concours, à combien de questions, au maximum, Benjamine a répondu correctement pour obtenir un total de coefficients égal à 73 ?
- d) Dans un concours, l'ordinateur peut attribuer un maximum de 166'751 scores différents.
Combien y a-t-il de questions dans ce concours ?

Solutions

- a) Somme des coefficients = $1 + 3 + 5 = 9$. Score obtenu = 3-9.
- b) Il y a 8 scores différents : 0-0, 1-1, 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5 et 3-6.
- c) Benjamine a répondu à 11 questions, au maximum, dans ce concours. Elle a répondu correctement aux questions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 18.

Numéros des questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	18
Somme des coefficients	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...	73

- d) Il existe certainement une fonction polynomiale liant le nombre de scores différents au nombre de questions. Pour s'assurer de cela, appliquons la méthode des différences expliquée dans la rubrique E de mon site (<https://jeuxmath.ch>).

Cherchons le nombre de scores différents d'un concours qui contiendrait 0 question, 1 question, 2 questions, 3 questions, etc.

0 question : 0-0 $\Rightarrow$ 1 seul score.

1 question : 0-0, 1-1 $\Rightarrow$ 2 scores différents.

2 questions : 0-0, 1-1, 1-2, 2-3 $\Rightarrow$ 4 scores différents.

3 questions : 0-0, 1-1, 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-6 $\Rightarrow$ 8 scores différents.

4 questions : 0-0 (1 score), 1-1 à 1-4 (4 scores), 2-3 à 2-7 (5 scores), 3-6 à 3-9 (4 scores), 4-10 (1 score) $\Rightarrow$ 15 scores différents.

5 questions : 0-0 (1 score), 1-1 à 1-5 (5 scores), 2-3 à 2-9 (7 scores), 3-6 à 3-12 (7 scores), 4-10 à 4-14 (5 scores), 5-15 (1 score) $\Rightarrow$ 26 scores différents.

La méthode des différences nous permet de savoir que la fonction polynomiale recherchée est du type $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Il nous faut 4 équations pour déterminer les 4 inconnues (a, b, c et d). Les voici :

$$f(0) = d = 1.$$

$$f(1) = a + b + c + d = 2.$$

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 4.$$

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 8.$$

La résolution de ce système d'équations donne $a = 1/6$, $b = 0$, $c = 5/6$ et $d = 1$.

D'où la fonction $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1$.

Alors, $\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1 = 166'751 \Rightarrow \frac{x^3 + 5x}{6} = 166'750 \Rightarrow x^3 + 5x = 1'000'500 \Rightarrow x = 100$.

Nombre de questions = **100**.

Augustin Genoud