

200. Les zéros * * * * *

En mathématiques, la factorielle d'un entier naturel n s'écrit $n!$ et est le résultat du produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n .

Ainsi, $7!$ (on prononce 7 factorielle) vaut 5040 car $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Le dernier chiffre différent de zéro dans 5040 est 4. Il y a un seul zéro après ce 4.

Combien y a-t-il de zéros après le dernier chiffre différent de zéro dans les nombres valant :

- a) $5!$ b) $11!$ c) $22!$ d) $100!$ e) $x!$

Solutions

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Il y a 1 seul zéro qui suit 2 dans 120.

b) $11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39'916'800$. Il y a 2 zéros qui suivent 8 dans 39'916'800.

c) Avant d'aller plus loin, reprenons le cas précédent où $11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$.

En regroupant les facteurs 2 et 5, on obtient $11! = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 =$

$(1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11) \cdot (10 \cdot 10)$. Appelons N , le produit des nombres de la première parenthèse.

Comme N ne se termine pas par zéro, alors $N \cdot 10 \cdot 10$ est égal à N suivi de deux zéros. C'est ce que nous avons trouvé dans le cas b).

Dans $22!$, il y a quatre facteurs qui sont des multiples de 5 : 5, 10, 15 et 20. Parmi les facteurs de $22!$, il y a plus de facteurs 2 que de facteurs 5 car il y a plus de nombres pairs que de multiples de 5.

$22! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22$. En remplaçant $4 \cdot 5$ par $2 \cdot 10$, puis $14 \cdot 15$ par $21 \cdot 10$, puis $18 \cdot 20$ par $36 \cdot 10$, on a :

$22! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 36 \cdot 19 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 22$. Le produit de tous les facteurs différents de 10 donne un nombre qui ne se termine pas par zéro. Comme il y a 4 facteurs 10 dans la dernière décomposition de $22!$, alors la réponse cherchée est 4.

d) Utilisons la stratégie esquissée au point précédent. Notons d'abord que dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$, il y a toujours plus de facteurs 2 que de facteurs 5.

Seuls les facteurs multiples de 5 vont engendrer un certain nombre de facteurs 10. Leur nombre est indiqué à la 2^e ligne du tableau suivant.

Quelques exemples :

$$25 = 5 \cdot 5 \Rightarrow 25 \text{ engendre 2 facteurs 10. } 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow 75 \text{ engendre 2 facteurs 10.}$$

$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow 50 \text{ engendre 2 facteurs 10. } 100 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow 100 \text{ engendre 2 facteurs 10.}$$

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2

La somme des nombres de la 2^e ligne du tableau précédent est 24.

e) En observant ce qui a été fait au point précédent, on peut affirmer ceci :

Tous les multiples de 5, sauf les multiples de 25, apportent 1 seul facteur 10.

Tous les multiples de 25, sauf les multiples de 125, amènent exactement 2 facteurs 10.

Tous les multiples de 125, sauf les multiples de 625 ($625 = 5^4$), apportent exactement 3 facteurs 10.

Tous les multiples de 5^n , sauf les multiples de 5^{n+1} , amènent exactement n facteurs 10.

Le nombre de zéros terminant le nombre correspondant à $x!$ est égal à la somme des parties entières inférieures de chacun des termes de la série suivante : $\left\lfloor \frac{x}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5^3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{5^n} \right\rfloor$.

Cette série doit s'arrêter lorsque le dernier terme est inférieur à 1.

Exemples :

$$x = 104. \text{ Nombre de zéros terminant } 104! = \left\lfloor \frac{104}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{104}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24.$$

$$x = 200. \text{ Nombre de zéros terminant } 200! = \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{125} \right\rfloor = 40 + 8 + 1 = 49.$$

Augustin Genoud