20. Le système proportionnel *** ****

Voici deux problèmes apparemment très proches. Le premier problème devrait pouvoir être résolu sans trop de difficultés. Le second est très embarrassant. Il peut vous amener vers de longues réflexions à la fois mathématiques et philosophiques.

Six personnes (A, B, C, D, E et F) doivent se partager 9 kilos d'or. Combien chacune va-t-elle recevoir de grammes d'or sachant que A, B, C, D, E et F ont droit respectivement à 8002 parts, 4698 parts, 3651 parts, 2612 parts, 1790 parts et 1603 parts (on arrondira les parts d'or au gramme près) ?

Neuf sièges doivent être attribués entre six partis A, B, C, D, E et F. Combien chaque parti va-t-il obtenir de sièges sachant qu'ils ont obtenu respectivement 8002 suffrages, 4698 suffrages, 3651 suffrages, 2612 suffrages, 1790 suffrages et 1603 suffrages et que la répartition des sièges se fait au système proportionnel (on ne tient pas compte du fait que, parfois, les partis n'ayant pas obtenu un pourcentage minimal de suffrages sont exclus de la répartition des sièges) ?

Solutions

→ Premier problème

Nombre total de parts : 8002 + 4698 + 3651 + 2612 + 1790 + 1603 = 22356. A partir de là, il s'agit de faire une répartition proportionnelle, selon le tableau suivant dans lequel on trouve les réponses à notre problème :

Personnes	Total	A	B	C	D	E	F
Nombre de parts	22356	8002	4698	3651	2612	1790	1603
Quantité d'or (grammes)	9000	3221	1891	1470	1052	721	645

→ Second problème

En politique, la répartition des sièges lors d'une votation peut être faite de plusieurs manières : en utilisant la règle de la majorité, en répartissant les sièges proportionnellement aux nombres de suffrages obtenus ou encore en mixant système majoritaire et système proportionnel.

Du point de vue mathématique, le système proportionnel est très intéressant. C'est celui qui nous intéresse ici. Répartir des sièges – donc des personnes – de manière proportionnelle aux nombres de suffrages obtenus est un véritable casse-tête (à part des cas rarissimes) car un siège ne peut être évidemment attribué qu'à une seule personne. Dès lors, les modes de répartition sont nombreux et ont tous leurs avantages et désavantages.

Faisons ici une petite parenthèse pour dire que si on élargit le sujet à toutes votations (système proportionnel et majoritaire), cela va devenir très vite complexe comme le prouvent les trois liens donnés ci-dessous. On peut passer plus loin sans passer par ces liens.

http://images.math.cnrs.fr/La-democratie-objet-d-etude.html

http://images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html

http://images.math.cnrs.fr/La-quete-du-Graal-electoral.html

Les deux méthodes les plus couramment utilisées pour répartir des sièges sont la méthode du **plus fort reste** et celle de la **plus forte moyenne** appelée aussi méthode du plus fort quotient. Dans ce qui suit, les nombres en écriture décimale sont systématiquement arrondis au centième près. On va s'intéresser aux deux méthodes en essayant de comprendre les enjeux mathématiques. Les règlements d'application de ces deux méthodes peuvent différer dans certains détails, généralement sans influence sur la répartition des sièges. Nous avons donc forcément fait des choix arbitraires. J'ai imaginé une troisième méthode. On la découvrira plus loin sous le nom de la méthode **Genoud**.

Dans les méthodes du plus fort reste et de la plus forte moyenne, la première répartition se fait de la même manière.

On effectue d'abord la somme totale des suffrages : 8002 + 4698 + 3651 + 2612 + 1790 + 1603 = 22356.

On cherche ensuite ce que l'on appelle le *quotient électoral* qui s'obtient en divisant la somme totale des suffrages par le nombre de sièges à distribuer. Dans notre exemple, le quotient électoral est 2484 (22356 : 9). Si ce quotient n'est pas un nombre entier, on prend la valeur approchée à l'unité, par excès.

Chaque parti va obtenir autant de sièges qu'il possède de fois le quotient électoral. C'est ainsi que dans une première répartition, on a ceci :

A → 8002 : 2484 = 3,22 ⇒ A obtient 3 sièges

B → 4698 : 2484 = 1,89 ⇒ B obtient 1 siège

C → 3651 : 2484 = 1,47 ⇒ C obtient 1 siège

D → 2612 : 2484 = 1,05 ⇒ D obtient 1 siège

E → 1790 : 2484 = 0,72 ⇒ E obtient 0 siège

F → 1603 : 2484 = 0,65 ⇒ F obtient 0 siège

On aurait pu obtenir la même répartition en faisant le tableau suivant :

Parti	Total	A	B	C	D	E	F
Nombre de suffrages	22356	8002	4698	3651	2612	1790	1603
Nombre de sièges	9	3,22	1,89	1,47	1,05	0,72	0,65

Six sièges sur neuf ont été attribués. A partir de là, les méthodes diffèrent.

a) **Méthode du plus fort reste** :

Cette méthode dit qu'il faut attribuer les trois sièges restants aux partis qui sont les plus proches d'avoir obtenu un siège supplémentaire, autrement dit, ce sont ceux qui ont les plus forts restes. A a un reste de 0,22, B de 0,89, C de 0,47, D de 0,5, E de 0,72 et F de 0,65. C'est donc B, E et F qui ont chacun un siège supplémentaire. Avec cette méthode, on obtient finalement :

A = 3 sièges
B = 2 sièges
C = 1 siège
D = 1 siège
E = 1 siège
F = 1 siège

b) **Méthode de la plus forte moyenne** :

Les partisans de cette méthode tiennent le discours suivant : il faut que chaque élu représente le même nombre d'électeurs (donc de suffrages). Si le parti F a un siège avec 1603 suffrages (selon la méthode du plus fort reste), il faut que le parti A en ait au moins 4 car 8002 : 1603 = 4,99.

Ils proposent alors d'attribuer les trois sièges manquants selon un procédé étonnant, en procédant à autant de répartitions qu'il reste de sièges à distribuer. Cette règle est importante, il faut absolument se la rappeler. A chaque répartition, comme chaque parti revendique un siège supplémentaire, on va diviser le nombre de suffrages de chaque parti par le nombre de sièges qu'il a obtenus jusque-là, augmenté d'une unité. Celui qui aura le plus grand quotient aura un siège supplémentaire.

Deuxième répartition : (chaque parti voit son diviseur augmenter d'une unité)

A → 8002 : 4 = 2000,5 ⇒ A possède 3 sièges
B → 4698 : 2 = 2349 ⇒ B possède 2 sièges
C → 3651 : 2 = 1825,5 ⇒ C possède 1 siège
D → 2612 : 2 = 1306 ⇒ D possède 1 siège
E → 1790 : 1 = 1790 ⇒ E possède 0 siège
F → 1603 : 1 = 1603 ⇒ F possède 0 siège

C'est B qui a le plus grand quotient (2349). C'est lui qui obtient le siège supplémentaire. Sept sièges sont attribués. On passe à une nouvelle répartition.

Troisième répartition : (seul B voit son diviseur passer de 2 à 3)

A → 8002 : 4 = 2000,5 ⇒ A possède 4 sièges
B → 4698 : 3 = 1566 ⇒ B possède 2 sièges
C → 3651 : 2 = 1825,5 ⇒ C possède 1 siège
D → 2612 : 2 = 1306 ⇒ D possède 1 siège
E → 1790 : 1 = 1790 ⇒ E possède 0 siège
F → 1603 : 1 = 1603 ⇒ F possède 0 siège

C'est A qui a le plus grand quotient (2000,5). C'est lui qui obtient le siège supplémentaire. Huit sièges sont attribués. On passe à une nouvelle répartition pour l'attribution du dernier siège.

Quatrième répartition : (seul A voit son diviseur passer de 4 à 5)

A → 8002 : 5 = 1600,4 ⇒ A possède 4 sièges
B → 4698 : 3 = 1566 ⇒ B possède 2 sièges
C → 3651 : 2 = 1825,5 ⇒ C possède 2 sièges
D → 2612 : 2 = 1306 ⇒ D possède 1 siège
E → 1790 : 1 = 1790 ⇒ E possède 0 siège
F → 1603 : 1 = 1603 ⇒ F possède 0 siège

C'est C qui a le plus grand quotient (1825,5). C'est lui qui obtient le dernier siège.

Tous les sièges sont maintenant attribués.

La technique utilisée pour répartir les sièges dans la méthode de la plus forte moyenne est surprenante. Cependant, elle peut s'appliquer aisément, par un procédé qui ne demande quasiment aucune connaissance des mathématiques.

Parfois, dans cette méthode, le quotient électoral est obtenu en divisant la somme totale des suffrages par le nombre de sièges à distribuer, plus un. Dans notre exemple, il serait égal à 2236 (22356 : 10). Ceci ne change pas la répartition des sièges mais en diminue parfois le nombre de répartitions.

Pour bien comprendre les enjeux mathématiques de cette méthode, imaginons une autre manière de distribuer les sièges, jamais utilisée en politique. Les partisans de cette méthode prétendent que si 1603 suffrages ont suffi au parti F pour obtenir un siège, il faut que dans chaque parti, tout groupe de 1603 suffrages se voie attribuer un siège. Ils font alors la répartition suivante :

Parti		A	B	C	D	E	F
Nombre de suffrages	1603	8002	4698	3651	2612	1790	1603
Nombre de sièges	1	4,99	2,93	2,28	1,63	1,12	1

Avec un siège tous les 1603 suffrages, il faudrait 11 sièges en tout. Comme 1603 ne convient pas pour attribuer 9 sièges, il faut choisir un nombre supérieur à 1603 comme valeur étalon d'un siège de manière que 9 sièges soient attribués. Il faut faire varier cette valeur étalon.

Supposons que la valeur étalon soit 1900. On a alors le tableau suivant :

Parti		A	B	C	D	E	F
Nombre de suffrages	1900	8002	4698	3651	2612	1790	1603
Nombre de sièges	1	4,21	2,47	1,92	1,37	0,94	0,84

Cette fois, il n'y a que 8 sièges attribués. Essayons alors avec 1800. On obtient :

Parti		A	B	C	D	E	F
Nombre de suffrages	1800	8002	4698	3651	2612	1790	1603
Nombre de sièges	1	4,45	2,61	2,03	1,45	0,99	0,89

Les 9 sièges sont maintenant attribués et on constate que chaque parti a obtenu le même nombre de sièges que par la méthode utilisée en politique.

En comparant les répartitions obtenues par les deux méthodes, on constate que la méthode du plus fort reste favorise les petits partis tandis que les grands partis sont avantagés par la méthode de la plus forte moyenne. On notera également qu'avec la méthode de la plus forte moyenne, il arrive qu'un même parti se voie attribuer plusieurs sièges après la première répartition, ce qui n'est jamais le cas avec la méthode du plus fort reste. Notons encore que la méthode du plus fort reste peut conduire à un paradoxe dit d'Alabama : une augmentation du nombre de sièges à distribuer peut conduire à perdre des sièges pour certains partis !

Voici la troisième méthode qui me semble être un compromis entre les deux méthodes précédentes :

c) **Méthode Genoud** :

Elle consiste à classer les résultats des partis dans l'ordre décroissant des suffrages obtenus comme c'est déjà le cas dans notre exemple (A > B > C > D > E > F). Ensuite, on va comparer chacun des partis avec tous les partis ayant obtenu moins de suffrage.

1) A contre B + C + D + E + F, soit 8002 contre 14354 (4698 + 3651 + 2612 + 1790 + 1603).
2) B contre C + D + E + F, soit 4698 contre 9656 (3651 + 2612 + 1790 + 1603).
3) C contre D + E + F, soit 3651 contre 6005 (2612 + 1790 + 1603).
4) D contre E + F, soit 2612 contre 3393 (1790 + 1603).
5) E contre F, soit 1790 contre 1603.

A contre tous les autres :

Partis	Total	A	B + C + D + E + F
Nombre de suffrages	22356	8002	14354
Nombre de sièges	9	3,22	5,78

A doit avoir 3 sièges et tous les autres 6 (car 5,78 est plus proche de 6 que 3,22 de 4). A aura 3 sièges et les autres partis doivent se répartir 6 sièges. Maintenant, B doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Total	B	C + D + E + F
Nombre de suffrages	14354	4698	9656
Nombre de sièges	6	1.96	4,04

B aura 2 sièges (1,96 est plus proche de 2 que 4,04 de 5) et les partis restants doivent se répartir 4 sièges. C doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Total	C	D + E + F
Nombre de suffrages	9656	3651	6005
Nombre de sièges	4	1,51	2,49

C aura 2 sièges (1,51 est plus proche de 2 que 2,49 de 3) et les partis restants doivent se répartir 2 sièges. D doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Total	D	E + F
Nombre de suffrages	6005	2612	3393
Nombre de sièges	2	0,87	1,13

D aura 1 siège et les deux derniers partis doivent se répartir le dernier siège. C'est forcément E qui va l'avoir car il a plus de suffrages que F. Les 9 sièges sont attribués et on a finalement :

A = 3 sièges
B = 2 sièges
C = 2 sièges
D = 1 siège
E = 1 siège
F = 0 siège

Comparons les résultats :

Partis	A	B	C	D	E	F
Nombre de sièges (plus fort reste)	3	2	1	1	1	1
Nombre de sièges (plus forte moyenne)	4	2	2	1	0	0
Nombre de sièges (Genoud)	3	2	2	1	1	0

La méthode Genoud est bien un compromis entre les deux méthodes traditionnelles. Elle peut paraître un peu plus compliquée du point de vue mathématique mais, si nécessaire, un programme informatique pourrait facilement être créé pour effectuer les calculs.

Notes

Toutes les méthodes peuvent, exceptionnellement, conduire à une impasse. Dans ce cas, le législateur a prévu des règles particulières faisant appel parfois à un simple tirage au sort.

Comme indiqué au départ, le second problème est embarrassant. En effet, il n'y a pas de solutions absolues car tout est fonction de la méthode utilisée.