

Les Justes et les menteurs * ** *** ****

Dans un village, il n'y a que deux types d'habitants : les Justes qui disent toujours la vérité et les menteurs qui mentent toujours. Les habitants de cette localité se connaissent parfaitement : ils savent qui est juste et qui est menteur.

Un inspecteur qui n'habite pas ce village a été chargé de rencontrer de temps en temps des personnes résidentes de cette curieuse localité.

- a) Une fois, l'inspecteur rencontra Pascal et Quentin qui lui dirent ceci :
Pascal : il m'arrive de mentir, mais le plus souvent je dis la vérité.
Quentin : Pascal est un juste.
Qui ment ?
- b) Un jour, à cause d'un vol, l'inspecteur interrogea trois suspects. L'inspecteur savait que Xavier était un juste. Voici les affirmations de Yann et Zidane :
Yann : Zidane est un menteur.
Zidane : Xavier et Yann sont des menteurs.
Qui ment ?
- c) Lors d'une fête, l'inspecteur demanda à Anaïs, Béa et Cathy si elles étaient des justes. Voici leurs réponses :
Anaïs : Il y a deux justes parmi nous.
Béa : Il y a deux menteurs parmi nous.
Cathy : Il y a un menteur parmi nous.
Qui sont les justes ?
- d) A l'occasion d'une rencontre avec l'inspecteur, Denis, Eloane, Fanny et Gabriel dirent ceci :
Denis : Un seul d'entre nous ment.
Eloane : Deux seuls d'entre nous mentent.
Fanny : Trois seuls d'entre nous mentent.
Gabriel : Nous mentons tous.
Qui ment ?
- e) Dans le cadre d'une affaire judiciaire, l'inspecteur demanda aux 35 personnes assises autour d'une grande table ronde si elles se trouvaient à côté d'un menteur. Ils eurent tous la même réponse : oui.
Combien y avait-il de justes, au minimum, parmi ces 35 personnes ?
Combien y avait-il de justes, au maximum, parmi ces 35 personnes ?

Solutions

Dans les tableaux suivants, J désigne un juste et M un menteur.

Note 1 : Souvent, il faut examiner plusieurs cas. Pour chacun d'eux, une seule affirmation fautive suffit à éliminer le cas concerné.

Note 2 : Si quelqu'un dit qu'il y a 3 menteurs dans un groupe, cela ne signifie pas qu'il n'y a forcément que 3 menteurs dans le groupe. Cela indique qu'il y en a au moins 3.

- a) Pascal ne peut pas être à la fois un juste et un menteur. Donc, Pascal ment.
Lorsque Quentin prétend que Pascal est un juste, il ment aussi.
Pascal et **Quentin** sont des menteurs.
- b) Zidane est forcément un menteur car Xavier est un juste. Deux cas sont à examiner.
1^{er} cas : Yann ne ment pas quand il affirme que Zidane est un menteur. Yann devrait donc être un juste. Ce cas est impossible.
2^e cas : Yann dit la vérité quand il certifie que Zidane est un menteur. Tout joue.
Seul **Zidane** ment.

Cas →	1	2
Xavier	J	J
Yann	M	J
Zidane	M	M

c) Huit cas sont à étudier.

Cas →	1	2	3	4	5	6	7	8
Anaïs	J	J	M	J	J	M	M	M
Béa	J	J	J	M	M	J	M	M
Cathy	J	M	J	J	M	M	J	M
Cas exclus →	E1	E1	E1		E2	E3	E4	E4

Il est peut-être nécessaire de bien relire la 2^e note donnée précédemment.

Dans les 1^{er}, 2^e et 3^e cas, Béa ne peut pas être une Juste car son affirmation est fausse (E1).

Dans le 5^e cas, Anaïs ne peut pas être une Juste car son affirmation est fausse (E2).

Dans le 6^e cas, Cathy ne ment pas car son affirmation est vraie (E3).

Dans les 7^e et 8^e cas, Béa ne ment pas (E4).

Il ne reste que le 4^e cas dans lequel il n'y a aucune contradiction.

Les Justes sont **Anaïs** et **Cathy**.

d) Comme chacun d'entre eux prétend quelque chose de différent et qu'il n'est pas possible que tous mentent (dans ce cas, Gabriel dirait la vérité), il n'y a qu'un seul qui dit la vérité. D'où 4 cas possibles. Seul le 3^e cas joue.

Cas →	1	2	3	4
Denis	J	M	M	M
Eloane	M	J	M	M
Fanny	M	M	J	M
Gabriel	M	M	M	J

Les menteurs sont **Denis**, **Eloane** et **Gabriel**.

e) S'il n'y avait que 3 personnes autour de la table, la seule disposition possible serait JJM (J₁J₂M₃). L'ajout des personnes supplémentaires doit suivre la règle suivante : un Juste ne peut être entouré que d'un Juste et d'un Menteur, sans que trois Justes ne soient côte à côte ; un Menteur ne peut être entouré que de deux Justes.

Pour trouver le minimum de Justes, il faut mettre autour de la table un maximum de Menteurs.

Après J₁J₂M₃ on ne peut ajouter qu'un Menteur (M₄).

Après M₄, on ne peut ajouter qu'un Juste (J₅).

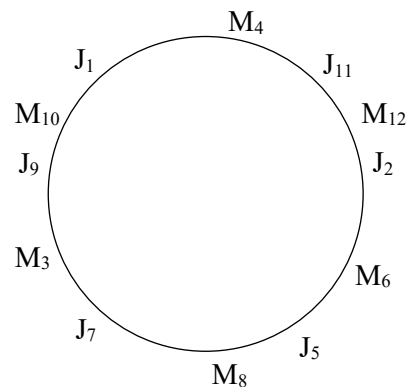
Après J₅, on peut ajouter un Menteur (M₆).

Après M₆, on ne peut ajouter qu'un Juste (J₇).

Après J₇, on peut ajouter un Menteur (M₈).

Après M₈, on ne peut ajouter qu'un Juste (J₉).

Et ainsi de suite...



Nombre de personnes	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Nombre maximum de Menteurs	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	...

Nombre maximum de Menteurs parmi 35 personnes = $\frac{35-1}{2} = 17$.

Nombre minimum de Justes = $35 - 17 = \mathbf{18}$.

Pour répondre à la seconde question, il faut évidemment mettre autour de la table un maximum de Justes.

Après $J_1J_2M_3$ on doit ajouter un menteur (M_4).

Après M_4 , on peut ajouter deux Justes (J_5 et J_6).

Après J_6 , on doit ajouter un menteur (M_7).

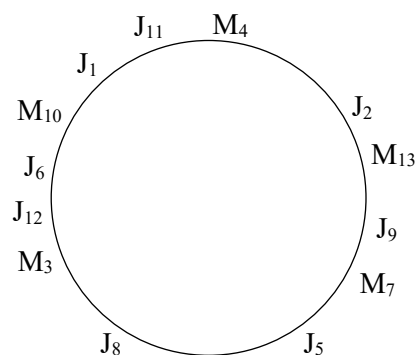
Après M_7 , on peut ajouter deux Justes (J_8 et J_9).

Après J_9 , on doit ajouter un menteur (M_{10}).

Après M_{10} , on peut ajouter deux Justes (J_{11} et J_{12}).

Après J_{11} , on doit ajouter un menteur (M_{13}).

Et ainsi de suite...



Nombre de personnes	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
Nombre maximum de Justes	2	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	...

Lorsque le nombre de personnes (n) appartient à un multiple de 3 augmenté de 2, on a $f(5) = 3$,

$f(8) = 5$, $f(11) = 7$, etc... On trouve aisément que dans ce cas $f(n) = \frac{2x-1}{3}$.

35 est un multiple de 3 augmenté de 2. Alors $f(35) = 23$. Nombre maximum de Justes = **23**.

Augustin Genoud