

### 196. Les interrupteurs \*\* \*\*\* \*\*\*\*\*

- a) Un interrupteur, lorsqu'il est actionné, change l'état de certaines lampes : si la lampe est éteinte, elle s'allume ; si la lampe est allumée, elle s'éteint.  
 Dans un pièce, il y a cinq lampes, toutes éteintes, numérotées de 1 à 5. Il y aussi cinq interrupteurs numérotés de A à E. On sait que :
- L'interrupteur A ne change l'état que des lampes 3 et 4.
  - L'interrupteur B ne change l'état que des lampes 4 et 5.
  - L'interrupteur C ne change l'état que des lampes 1, 3 et 5.
  - L'interrupteur D ne change l'état que de la lampe 4.
  - L'interrupteur E ne change l'état que des lampes 2, 3, 4 et 5.
- Sur quels interrupteurs faut-il agir pour que les cinq lampes soient toutes allumées en même temps, sachant que l'on souhaite actionner un minimum d'interrupteurs ?
- b) Dans une salle, il y a 18 interrupteurs numérotés de 1 à 18 ainsi que 18 ampoules, toutes éteintes, numérotées de 1 à 18.  
 Paul appuie sur le 1<sup>er</sup> interrupteur. Toutes les ampoules s'allument.  
 Paul appuie sur le 2<sup>e</sup> interrupteur. Cet interrupteur change uniquement l'état des ampoules portant un numéro qui est un multiple de 2.  
 Paul appuie sur le 3<sup>e</sup> interrupteur. Cet interrupteur change uniquement l'état des ampoules portant un numéro qui est un multiple de 3.  
 Paul appuie sur le 4<sup>e</sup> interrupteur. Cet interrupteur change uniquement l'état des ampoules portant un numéro qui est un multiple de 4.  
 Paul continue ainsi jusqu'à la dernière ampoule : quand il appuie sur le  $n$ ème interrupteur, cet interrupteur change uniquement l'état des ampoules portant un numéro qui est un multiple de  $n$ .  
 Quels sont alors les numéros des ampoules allumées ?
- c) Un jeu électronique possède trois interrupteurs A, B et C dont il est impossible de connaître l'état qui ne peut être qu'ouvert ou fermé. Chaque fois que l'on appuie sur un interrupteur, son état change. Le jeu ne peut débiter que si les trois interrupteurs sont ouverts.  
 Lorsque Patty se met à jouer, le jeu ne fonctionne pas. Patty appuie alors sur A mais le jeu ne démarre pas. Elle appuie ensuite sur B, mais le jeu ne démarre toujours pas. Elle appuie ensuite sur C, mais le jeu ne démarre toujours pas.  
 A partir de là, en appliquant la meilleure stratégie, sur quelle suite d'interrupteurs (la plus courte possible) doit-elle appuyer pour faire démarrer le jeu, dans le pire des cas ?

### Solutions

- a) Pour que la lampe portant le numéro  $x$  s'allume, il faut appuyer un nombre impair de fois, en tout, sur des interrupteurs qui changent l'état de la lampe numéro  $x$ . Ainsi, seul l'interrupteur C ne peut allumer la lampe 1. Alors, l'interrupteur C doit être actionné (1 fois ou 3 fois ou 5 fois...). De la même manière, seul l'interrupteur E ne peut allumer la lampe 2. Commençons donc par actionner une seule fois les interrupteurs C et E (l'ordre n'a pas d'importance).  
 Dans le tableau ci-contre, on trouve à la première ligne les numéros des lampes et à la première colonne, les interrupteurs. Dans les cases grisées, on a l'état des lampes (A comme allumé et E comme éteint). Après avoir actionné les interrupteurs C et E, deux lampes sont encore éteintes. En actionnant ensuite les interrupteurs A et B, toutes les lampes seront allumées.  
 Il faut actionner les interrupteurs C, E, A et B (l'ordre n'a pas d'importance).
- |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| C | A | E | A | E | A |
| E | A | A | E | A | E |
| A | A | A | A | E | E |
| B | A | A | A | A | A |
- b) Dans le tableau suivant, notons sur la ligne du haut les numéros des ampoules et sur la première colonne, les numéros des interrupteurs. Les symboles utilisés sont les mêmes qu'au point a).

A partir de la ligne du 10<sup>e</sup> interrupteur, chacune des ampoules allant de 10 à 18 change une seule fois d'état. Dans le tableau, on peut alors passer tout de suite du 9<sup>e</sup> interrupteur au 18<sup>e</sup>.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E
3	A	E	E	E	A	A	A	E	E	E	A	A	A	E	E	E	A	A
4	A	E	E	A	A	A	A	A	E	E	A	E	A	E	E	A	A	A
5	A	E	E	A	E	A	A	A	E	A	A	E	A	E	A	A	A	A
6	A	E	E	A	E	E	A	A	E	A	A	A	A	E	A	A	A	E
7	A	E	E	A	E	E	E	A	E	A	A	A	A	A	A	A	A	E
8	A	E	E	A	E	E	E	E	E	A	A	A	A	A	A	E	A	E
9	A	E	E	A	E	E	E	E	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A
18	A	E	E	A	E	E	E	E	A	E	E	E	E	E	E	A	E	E

Ampoules allumées = **1, 4, 9** et **16**.

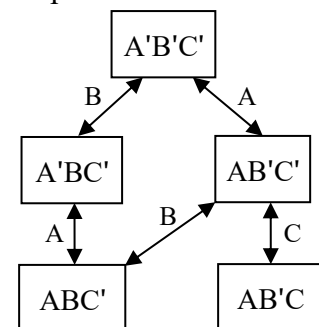
Les ampoules allumées, dans le cas de n interrupteurs et n ampoules, correspondent à 1<sup>2</sup>, 2<sup>2</sup>, 3<sup>2</sup>, 4<sup>2</sup>, 5<sup>2</sup>, 6<sup>2</sup>, etc.

- c) Appelons A, B et C, l'état des interrupteurs au départ. L'état contraire de A est A' et l'état contraire de A' est A. Il en est de même pour B et C.

Patty a testé successivement les états A'BC, A'B'C et A'B'C' et le jeu n'a jamais démarré. Il reste à tester 4 états : AB'C, ABC', A'BC' et AB'C'. Dans le pire des cas, il faut les tester tous, pour que le jeu démarre. Cela veut dire qu'il faut au minimum appuyer sur 4 interrupteurs.

Depuis A'B'C', Patty ne peut appuyer que sur les interrupteurs A ou B si elle ne veut pas revenir à l'état précédent (A'B'C'). Le croquis ci-contre nous montre qu'il n'y a qu'un chemin qui conduit à tous les états non testés en appuyant seulement sur 4 interrupteurs.

La suite cherchée est **B, A, B, C**.



Augustin Genoud