

194. Dans les verts pâturages ** *** ****

On admet qu'à l'arrivée des bêtes dans un pâturage, la hauteur de l'herbe est partout la même et que cette herbe croît constamment à la même vitesse.

L'appétit des bêtes et la vitesse de croissance de l'herbe peuvent varier d'un problème à un autre et ne sont pas à prendre comme des vérités scientifiques.

- a) 5 moutons, en 8 jours, ont mangé toute l'herbe d'un pré, soit 16 m^3 d'herbe.
Dans le même pré, 10 moutons auraient mangé toute l'herbe, en 2 jours.
Quelle quantité d'herbe auraient mangé ces 10 moutons ?
- b) 10 vaches, en 15 jours, dans un pré de 2000 m^2 , ont mangé les 800 m^3 d'herbe disponibles.
Lorsqu'elles sont arrivées dans le pré, la hauteur de l'herbe était de 25 cm.
De combien de centimètres par jour a poussé l'herbe dans ce pré ?
- c) On sait que 10 vaches ont mis 10 jours pour brouter toute l'herbe d'un pré de 5000 m^2 et que 18 vaches ont mis 2 jours pour brouter toute l'herbe d'un pré de 3000 m^2 .
Combien de vaches faut-il pour brouter toute l'herbe d'un pré de 24000 m^2 en 15 jours ?
Dans les trois cas, les vaches ont le même appétit, la hauteur de l'herbe à leur arrivée dans le pré est identique et l'herbe croît partout à la même vitesse.
- d) Un pré a nourri 1 vache et 1 chèvre pendant 45 jours. Le même pré aurait pu nourrir 1 vache et 1 oie pendant 60 jours ; il aurait aussi pu aussi nourrir 1 chèvre et 1 oie pendant 90 jours.
1 vache mange autant d'herbe qu'une chèvre et 1 oie.
Pendant combien de jours, 1 vache, 1 chèvre et 1 oie pourraient-ils se nourrir dans ce pré ?
Cette énigme, légèrement modifiée, provient de Sam Loyd (1841 – 1911), l'un des plus grand inventeur de casse-têtes mathématiques.

Solutions

- a) On sait que 5 moutons, en 8 jours, ont mangé 16 m^3 d'herbe.
Alors, 10 moutons, en 8 jours, auraient mangé 32 m^3 d'herbe.
Donc, 10 moutons, en 2 jours, auraient mangé **8 m^3** d'herbe.
- b) Supposons que les vaches ne soient pas venues dans ce pré. A la fin des 15 jours où elles auraient dû paître, la hauteur de l'herbe aurait atteint 0,40 m ($0,40 = 800 : 2000$), soit 40 cm.
Croissance de l'herbe en 15 jours = $40 - 25 = 15 \text{ cm}$.
Croissance de l'herbe par jour = $15 : 15 = \mathbf{1 \text{ cm}}$.
Autre manière de faire :
Quantité d'herbe à l'arrivée des vaches = $2000 \cdot 0,25 = 500 \text{ m}^3$.
Quantité d'herbe ayant poussé en 15 jours = $800 - 500 = 300 \text{ m}^3$.
Quantité d'herbe ayant poussé en 1 jour = $300 : 15 = 20 \text{ m}^3$.
Soit x, la vitesse de croissance de l'herbe par jour. Alors, $2000 \cdot x = 20 \Rightarrow x = 0,01 \text{ m}$. La croissance de l'herbe par jour a été de 1 cm.
- c) Supposons que la hauteur de l'herbe à l'arrivée des vaches était de 1 m et que l'herbe va continuer de pousser à raison de x mètres par jour. Utilisons le mètre comme unité. Ainsi, les quantités mangées seront des mètres au cube.
10 vaches, en 10 jours, mangent $5000 + 5000 \cdot 10 \cdot x = 5000 + 50000x$ (1).
18 vaches, en 2 jours, mangent $3000 + 3000 \cdot 2 \cdot x = 3000 + 6000x$ (2).
y vaches, en 15 jours, mangent $24000 + 24000 \cdot 15 \cdot x = 24000 + 360000x$ (3).
De (1), on tire que 18 vaches, en 10 jours, mangent $(5000 + 50000x) \cdot \frac{18}{10}$. Alors, 18 vaches, en 2 jours, mangent $(5000 + 50000x) \cdot \frac{18}{50}$, soit $1800 + 18000x$ (4).
De (4) et (2), on obtient l'équation suivante : $1800 + 18000x = 3000 + 6000x \Rightarrow x = 1/10$.

De (1) \Rightarrow 10 vaches, en 10 jours, mangent 10000 \Rightarrow 10 vaches, en 15 jours, mangent 15000 (5).

De (3) \Rightarrow y vaches, en 15 jours, mangent 60000 (6).

Alors, selon (5) et (6), il faut **40 vaches** pour manger 60000 en 15 jours.

d) Vache = V ; chèvre = C et oie = O.

On peut considérer que la surface du pré est de 1 unité, que la hauteur de l'herbe à l'arrivée des vaches est de 1 unité et que l'herbe va continuer de pousser à la vitesse de x unités par jour. On a alors :

V + C, en 45 jours, mangent $1 + 45x$ (1).

V + O, en 60 jours, mangent $1 + 60x$ (2).

C + O, en 90 jours, mangent $1 + 90x$ (3).

De (1), on a V + C, en 180 jours, mangent $4 + 180x$ (4).

De (2), on a V + O, en 180 jours, mangent $3 + 180x$ (5).

De (3), on a C + O, en 180 jours, mangent $2 + 180x$ (6).

Comme on sait que $V = C + O$, alors, selon (6), V mange $2 + 180x$ (7).

De (4) et (5), on a $2V + C + O = 3V$. Donc $3V$ mangent $7 + 360x \Rightarrow V$ mange $7/3 + 120x$ (8).

De (7) et (8) $\Rightarrow 2 + 180x = 7/3 + 120x \Rightarrow x = 1/180$ (9).

De (1), (2) et (3) $\Rightarrow 2V + 2C + 2O$ mangent $9 + 540x$, ce qui correspond à 12 selon (9).

Alors, V + C + O mangent 6 en 180 jours.

On sait aussi que V + C + O mangent $1 + tx = 1 + t \cdot \frac{1}{180}$.

| | | |
|---------------|-----|-----------------------------|
| Quantité | 6 | $1 + t \cdot \frac{1}{180}$ |
| Temps (jours) | 180 | t |

$6t = 180 + t \Rightarrow t = \mathbf{36 \text{ jours}}$.

Augustin Genoud