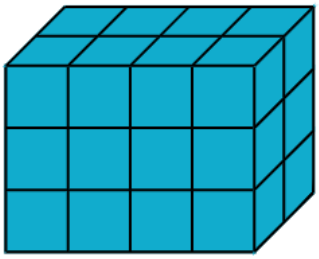
191. Le rayon laser * ** *** **** *****



Joseph s'amuse à construire des parallélépipèdes rectangles (solides délimités par six faces rectangulaires) à l'aide de cubes tous identiques. Le parallélépipède rectangle ci-contre a été construit avec 24 cubes ; ses dimensions peuvent être données par le triplet suivant : (4,3,2).

Un grand cube formé de petits cubes est aussi un parallélépipède rectangle.

Joseph imagine ensuite un rayon laser passant à travers deux sommets opposés de ses parallélépipèdes rectangles.

Combien de cubes sont traversés par le rayon laser dans les parallélépipèdes rectangles suivants :

a) (2,2,2) ?
b) (3,2,1) ?
c) (4,3,2) ?
d) Appelons N, le nombre de cubes traversés par le rayon laser. Quelle est la valeur de N pour un parallélépipède rectangle de dimensions (x,y,z) ?

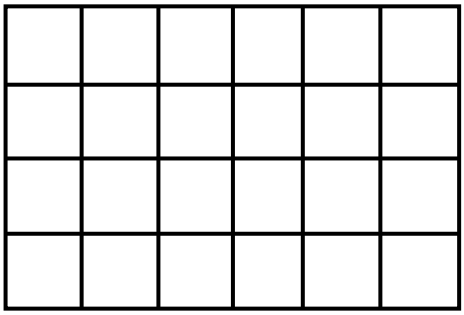
Si Joseph construisait un parallélépipède rectangle comptant 377 cubes dans la longueur et 39 cubes dans la largeur, le rayon laser traverserait 2025 cubes.

e) Dans ce cas, combien de cubes aurait-il mis dans la hauteur ?

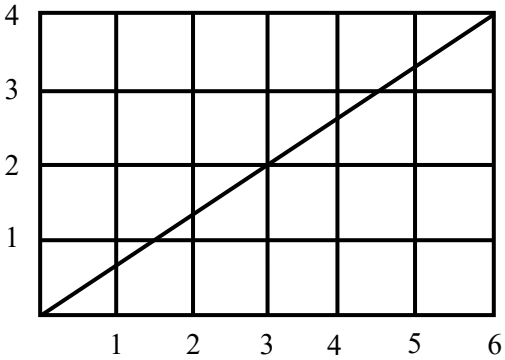
Solutions

a) Le rayon laser passe par le centre du grand cube en traversant **2** cubes.
b) Dans l'idéal, il faudrait construire ce parallélépipède rectangle comptant 6 petits cubes pour mieux imaginer le rayon laser traversant **4** cubes.
c) Le parallélépipède rectangle est celui présenté dans la donnée. Il faut un bel effort de vision dans l'espace pour voir que le rayon laser traverse **6** cubes.
d) Pour répondre à cette question, commençons par résoudre le problème suivant :

Le sol d'une salle rectangulaire est recouvert de 24 pavés carrés comme indiqué sur la figure ci-contre. A la suite d'une secousse sismique, tous les pavés traversés par une des diagonales de la salle se sont fissurés. Combien y a-t-il eu de pavés fissurés ?



Traçons la diagonale. Il est évident que la solution est 8.



Imaginons que l'on mettre un point à chaque intersection entre la diagonale et les traits du quadrillage. On aura 9 points. Chaque espace entre 2 points consécutifs représente la fissure d'un pavé. Cela fait 8 pavés fissurés. Pour aller du point (0,0) au point (6,4), la diagonale avance de 6 pavés vers la droite et de 4 pavés vers le haut. On pourrait croire que le nombre de pavés fissurés est égal à la somme de 6 + 4. Mais dans ce cas, on compte deux fois les points (3,2) et (6,4). Ce nombre 2 correspond au plus grand diviseur comme de 6 et 4.

Généralisons ce problème. Lorsque les pavés carrés de la diagonale d'une salle rectangulaire de dimension (x,y) sont fissurés par une secousse sismique, le nombre de pavés fissurés correspondent à x + y – PGDC (x,y).

Revenons à nos parallélépipèdes rectangles traversés par un rayon laser. Considérons l'ensemble des points d'intersection du rayon laser avec les plans définis par les faces des cubes. Le nombre

de pavés traversés correspond à x + y + z, moins tous les points d'intersection qui sont comptés deux fois, plus tous les points qui sont comptés trois fois.

On obtient alors N = **<u>x + y + z − PGDC (x,y) − PGDC (x,z) − PGDC (y,z) + PGDC (x,y,z)</u>**.

e) Soit z, le nombre de cubes dans la hauteur. $x = 377 = 13 \cdot 29$; $y = 39 = 3 \cdot 13$.
2025 = 377 + 39 + z – 13 – PGDC (377, z) − PGDC (39, z) + PGDC (377, 39, z).
2025 = 403 + z – PGDC (377, z) − PGDC (39, z) + PGDC (377, 39, z).
1622 = z – PGDC (377, z) − PGDC (39, z) + PGDC (377, 39, z) *
Supposons que z soit un multiple de 13. Alors, dans l'équation précédente, PGDC (377, z), PGDC (39, z) et PGDC (377, 39, z) seraient tous des multiples de 13. Par conséquent, 1622 devrait l'être aussi. Comme ce n'est pas le cas, z n'est pas un multiple de 13. On en conclut ceci :
PGDC (377, z) = 1 ou 29 ; PGDC (39, z) = 1 ou 3 ; PGDC (377, 39, z) = 1.
De l'équation *, on obtient z = 1621 + PGDC (377, z) + PGDC (39, z).
Quatre cas doivent être étudiés :

1) z = 1621 + 1 + 1 = 1623, mais 1623 est un multiple de 3, alors le PGDC (39, z) n'est pas égal à 1. Ce cas ne joue pas.
2) z = 1621 + 1 + 3 = 1625, mais 1625 n'est pas un multiple de 3, alors le PGDC (39, z) n'est pas égal à 3. Ce cas ne joue pas.
3) z = 1621 + 29 + 1 = 1651, mais 1651 n'est pas un multiple de 29, alors le PGDC (377, z) n'est pas égal à 29. Ce cas ne joue pas.
4) z = 1621 + 29 + 3 = 1653. Tout fonctionne car $1653 = 3 \cdot 19 \cdot 29$.

Nombre de cubes dans la hauteur = **<u>1653</u>**.

N = 377 + 39 + 1653 – (13 + 29 + 3) + 1 = 2069 – 45 + 1 = 2025.

Augustin Genoud