182. Les heures de vérité ! ** *******

a) Il est exactement « a » heures, « b » minutes, 43 secondes et une fraction de seconde.

Que vaut « b » sachant qu'à cet instant, l'aiguille des minutes et celle des heures sont parfaitement superposées ?

b) Héloïse fait régulièrement une sieste qui dure moins d'une heure et qui débute entre 13 et 14 heures. Aujourd'hui, à la fin de sa sieste, elle constate que les aiguilles (heures et minutes) de son horloge ont exactement les mêmes positions qu'au début de sa sieste. Elles ont simplement permuté.

A quelle heure, à la seconde près, a débuté sa sieste ? Pendant combien de temps, à la seconde près, a duré sa sieste ?

c) Combien de fois les deux aiguilles d'une montre (heures et minutes) occupent-elles une position telle que leur interversion donne une position où l'heure est également possible ? A quelle heure, à la seconde près, et au plus proche de 8 heures, existe-t-il une telle position ?

Solutions

a) L'aiguille des minutes et celle des heures sont parfaitement superposées 11 fois toutes les 12 heures. Dans 12 heures, il y a 43200 secondes.

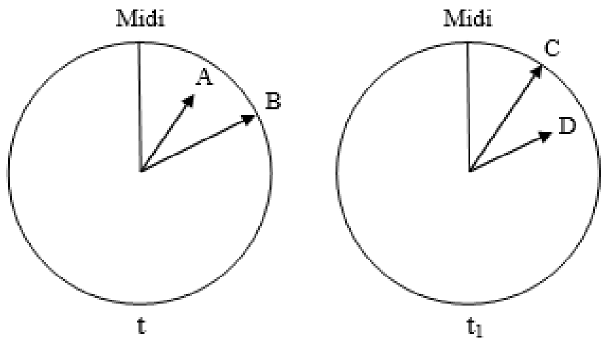
$\frac{43'200''}{11} = 3927''$ et 3/11 de secondes = 1 h 05' 27'' et 3/11 de secondes.

Cherchons les heures de rencontres entre les aiguilles des minutes et des heures, en partant de minuit.

Première rencontre :	1 h 05' 27'' et 3/11 s
2e rencontre :	2 h 10' 54'' et 6/11 s
3e rencontre :	3 h 16' 21'' et 9/11 s
4e rencontre :	4 h 21' 49'' et 1/11 s
5e rencontre :	5 h 27' 16'' et 4/11 s
6e rencontre :	6 h 32' 43'' et 7/11 s
7e rencontre :	7 h 38' 10'' et 10/11 s
8e rencontre :	8 h 43' 38'' et 2/11 s
9e rencontre :	9 h 49' 05'' et 5/11 s
10e rencontre :	10 h 54' 32'' et 8/11 s
11e rencontre :	midi

Le « b » cherché ne peut être que **32**. C'est l'heure exacte de la 6e rencontre.

b) Le croquis de gauche montre la situation au début de la sieste, avec A qui représente l'aiguille des heures. La sieste ayant duré moins d'une heure, l'aiguille des heures, du début à la fin de la sieste, n'a pu avancer que d'un peu moins de 30 degrés (30 degrés est l'angle que parcourt l'aiguille des heures en une heure). Cela nous permet de placer l'aiguille des heures (B) au début de la sieste.



Le croquis de droite montre la situation à la fin de la sieste où les positions des aiguilles sont inversées par rapport au début de la sieste.

Calculons les distances à partir de midi, en nombres de tours de cadran, lorsque les deux aiguilles sont superposées.

L'aiguille des minutes parcourt un tour de cadran en 1 heure (3600 secondes).

L'aiguille des heures parcourt un tour de cadran en 12 heures (43200 secondes).

Distance parcourue par l'aiguille des minutes (tours)	1	x/3600
Temps (secondes)	3600	x

Distance parcourue par l'aiguille des heures (tours)	1	x/43200
Temps (secondes)	43'200	x

Distance parcourue par A de midi au début de la sieste = t/43200 (1)
Distance parcourue par B de midi au début de la sieste = t/3600 (2)
Distance parcourue par C de midi à la fin de la sieste = t_1/3600 (3)
Distance parcourue par D de midi à la fin de la sieste = t_1/43200 (4)
L'aiguille A a 2 tours de retard sur l'aiguille C, et l'aiguille D a 1 tour de retard sur l'aiguille B, ce qui donne les équations suivantes :

$\frac{t}{43200}+2=\frac{t_1}{3600}$ (5) et $\frac{t_1}{43200}+1=\frac{t}{3600}$ (6)

De (5), on tire $t + 86400 = 12\,t_1 \Rightarrow t = 12t_1 - 86400$ (7).

De (6), on tire $t_1 + 43200 = 12\,t$. Avec (7), on a $t_1 + 43200 = 144\,t_1 - 1036800 \Rightarrow 143t_1 = 1080000 \Rightarrow t_1 = \frac{1080000}{143}$. Alors $t = \frac{604800}{143}$.

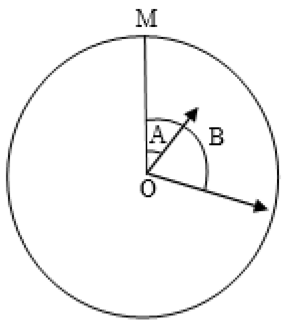
Heure du début de la sieste = $t = \frac{604800}{143} \cong 4229{,}4$ secondes = 1 h 10' 29'' = **13 h 10' 29''**.

Voir aussi le dernier paragraphe de la solution du point c)

Durée de la sieste = $t_1 - t = \frac{475200}{143} \cong 3323{,}07$ secondes, soit **55'23''**.

c) La première question de ce problème fut, paraît-il, posé à Albert Einstein qui ne mit que quelques secondes pour donner la bonne réponse !

Soit A, l'angle formé par l'aiguille des heures avec le segment vertical OM et B, l'angle formé par l'aiguille des minutes avec le même segment. Lorsque l'on inverse la position des aiguilles, B représente l'angle des heures et A, celle des minutes.



Etant donné que l'aiguille des minutes se déplace 12 fois plus vite que l'aiguille des heures, on obtient les deux équations suivantes :

B + 360n = 12A (1) et A + 360m = 12B (2), avec n et m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11. Cela fait 144 équations.

Lorsque n et m = 0, on a les équations B = 12A et A = 12B qui conduisent à A = B = 0°. C'est midi.

Lorsque n et m = 11, on a les équations B + 3960 = 12A et A + 3960 = 12B qui conduisent à A = B = 360°. C'est aussi midi.

Voyons quelques autres cas :

- n = o et m = 1 ⇒ B = 12A et A + 360 = 12B.
  On en tire que $A = \frac{360}{143} \cong 2{,}5°$ et $B = \frac{4320}{143} \cong 30{,}2°$.
  L'aiguille des heures effectuant 360° en 12 h, alors 2,5° correspond à environ 0,08 h.
- n = o et m = 2 ⇒ B = 12A et A + 720 = 12B.

On en tire que $A = \frac{720}{143} \cong 5°$ (environ 0,17 h) et $B = \frac{8640}{143} \cong 60{,}4°$.

- n = o et m = 11 ⇒ B = 12A et A + 3960 = 12B.

  On en tire que $A = \frac{3960}{143} = \frac{360}{13} \cong 27{,}7°$ (environ 0,92 h) et $B = \frac{47520}{143} = \frac{4320}{13} \cong 332{,}3°$.

Lorsque n = 0 et que m va de 0 à 11, l'aiguilles des heures se situe entre midi et 1 heure.

- n = 1 et m = 0 ⇒ B + 360 = 12A et A = 12B.

  On en tire que $A = \frac{4320}{143} \cong 30{,}2°$ (environ 1,01 h) et $B = \frac{360}{143} \cong 2{,}5°$.

Chacun peut vérifier aisément ceci :
Lorsque n = 0, il y a 12 cas, entre 0 h et 1 h, qui correspondent aux conditions de la donnée.
Lorsque n = 1, il y a 12 cas, entre 1 h et 2 h, qui correspondent aux conditions de la donnée.
Et ainsi de suite...
Lorsque n = 10, il y a 12 cas, entre 10 h et 11 h, qui correspondent aux conditions de la donnée.
Lorsque n = 11, il y a 11 cas (on a vu auparavant que n = m = 11 donne la même solution que n = m = 0), entre 11 h et 12 h, qui correspondent aux conditions de la donnée.

Nombre total de fois où les deux aiguilles d'une montre occupent une position telle que leur interversion donne une position où l'heure est également possible $= 12 \cdot 12 - 1 = \underline{\mathbf{143}}$.

La réponse à la seconde question est soit l'heure correspondant à n = 7 et m = 11 ou à n = 8 et m = 0.

L'angle des heures (A), en fonction de n et m est égal à $(12n + m) \cdot \frac{360}{143}$. (1)

L'angle des minutes (B), en fonction de n et de m est égal à $(n + 12m) \cdot \frac{360}{143}$. (2)

Pour n = 7 et m = 11, on a, selon (1), $A = \frac{34200}{143} \cong$ 239,16°. L'aiguille des heures effectuant 360° en 12 h, alors 239,16° correspond à 7,972 heures, soit 7 h 58' 19''.

Pour n = 8 et m = 0, on a, selon (1), $A = \frac{34560}{143} \cong$ 241,678°, ce qui correspond à 8,056 heures, soit 8 h 03' 21''.

L'heure cherchée est donc **<u>7 h 58' 19''</u>**.

Remarque : l'heure du début de la sieste dans le point b) aurait pu être obtenue à l'aide des équations suivantes : B + 360 = 12A (n = 1) et A + 720 = 12B (m = 2).

Augustin Genoud