181. Les pions bleus et rouges * ** *** ****

Un jeu consiste à poser des pions bleus et rouges sur les cases, toutes identiques, d'un quadrillage rectangulaire, à raison d'un pion par case.

a) Christine décide de mettre 3 pions bleus par rangée et 2 pions rouges par colonne sur un quadrillage de 3 rangées.
Combien de colonnes doit compter ce quadrillage afin que chaque case soit occupée par un pion ?

b) Aude joue sur un quadrillage de 11 rangées et de 8 colonnes. Une fois qu'elle a mis 5 pions bleus par rangée et un nombre fixe de pions rouges par colonne, il reste 1 case inoccupée.
Combien a-t-elle mis de pions rouges par colonne ?

c) Robin joue sur un quadrillage qui compte deux fois plus de colonnes que de rangées. Une fois qu'il a posé 6 pions bleus par rangée et 5 pions rouges par colonne, aucune case n'est vide.
Combien de rangées compte ce quadrillage ?

d) Sur son quadrillage, Kelvin a mis 11 pions bleus par rangée et 8 pions rouges par colonne. Il reste 17 cases vides et la différence entre le nombre de colonnes et de rangées ne peut pas être plus petite.
Combien de rangées compte ce quadrillage ?

Solutions

a) Comme Christine doit mettre 2 pions rouges par colonne, alors chaque colonne sera occupée par un pion bleu et 2 pions rouges. Pour qu'il n'y ait aucune case inoccupée, le quadrillage de Christine doit compter **9 colonnes**. Voici une configuration possible :

B	B	B	R	R	R	R	R	R
R	R	R	B	B	B	R	R	R
R	R	R	R	R	R	B	B	B

b) Nombre de cases du quadrillage de Aude = $11 \cdot 8 = 88$.
Nombre de cases contenant des pions bleus = $11 \cdot 5 = 55$.
Nombre de cases occupées par des pions rouges = 88 – 55 + 1 = 32.
Nombre de pions rouges par colonne = 32 : 8 = **4**.

c) Soit x, le nombre de rangées ; 2x est alors le nombre de colonnes.
Le nombre de cases vides est égal au nombre total de cases moins le nombre total de pions bleus posés, moins le nombre total de pions rouges posés. Cela nous permet d'établir l'équation suivante : $x \cdot 2x - 6x - 5 \cdot 2x = 2x^2 - 16x = 2x(x - 8) = 0$.
D'où x = **8** = nombre de rangées. Voici une configuration possible :

B	B	B	B	B	B	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
B	B	B	B	B	B	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
R	R	R	R	R	R	B	B	B	B	B	R	R	R	R	B
R	R	R	R	R	R	B	B	B	B	R	B	B	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	B	B	B	B	B	B
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	B	B	B	B	B	B
R	R	R	R	R	R	B	B	B	B	R	R	R	B	B	R
B	B	B	B	B	B	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R

d) Soit x, le nombre de rangées ; y, le nombre de colonnes et V, le nombre de cases vides.
$V = xy - 11x - 8y = 17$.

Comme il y a 8 pions rouges par colonne, le nombre de rangées est forcément supérieur à 8. D'autre part, si x est un nombre pair, alors V sera forcément un nombre pair, donc jamais égal à 17.

Si $x = 9 \Rightarrow V = 9y - 99 - 8y = y - 99 = 17 \Rightarrow y = 116$. $116 - 9 = 107$.

Si $x = 11 \Rightarrow V = 11y - 121 - 8y = 3y - 121 = 17 \Rightarrow y = 46$. $46 - 11 = 35$.

Si $x = 13 \Rightarrow V = 13y - 143 - 8y = 5y - 143 = 17 \Rightarrow y = 32$. $32 - 13 = 19$.

Si $x = 15 \Rightarrow V = 15y - 165 - 8y = 7y - 165 = 17 \Rightarrow y = 26$. $26 - 15 = 11$.

Si $x = 17 \Rightarrow V = 17y - 187 - 8y = 9y - 187 = 17 \Rightarrow$ y n'est pas un nombre entier naturel.

Si $x = 19 \Rightarrow V = 19y - 209 - 8y = 11y - 209 = 17 \Rightarrow$ y n'est pas un nombre entier naturel.

Si $x = 21 \Rightarrow V = 21y - 231 - 8y = 13y - 231 = 17 \Rightarrow$ y n'est pas un nombre entier naturel.

Si $x = 23 \Rightarrow V = 23y - 253 - 8y = 15y - 253 = 17 \Rightarrow y = 18$. $23 - 18 = 5$.

Si $x = 25 \Rightarrow V = 25y - 275 - 8y = 17y - 275 = 17 \Rightarrow$ y n'est pas un nombre entier naturel. A partir de là, la différence entre le nombre de colonnes et de rangées est supérieure à 5 qui est la plus petite différence trouvée jusqu'ici.

Nombre de rangées = **23**.

Augustin Genoud