180. Les joyeux anniversaires * ** * ****

Brigitte, Ginette et Catherine, trois des quatre filles d'Ida et d'Aster ont régulièrement fêté leurs anniversaires en mettant sur leurs gâteaux autant de bougies que leur âge et elles n'ont jamais utilisé deux fois la même bougie. Elles ont gardé toutes leurs bougies.

a) Combien de bougies possédait Brigitte après avoir fêté ses 10 ans ?

b) Après avoir fêté son anniversaire avec ses copines, Ginette possédait 120 bougies.
Quel âge avait-elle lors de cet anniversaire ?

c) Dédé a préparé deux magnifiques desserts pour l'anniversaire de son épouse Francine.
Aux invités, il dit ceci : « Sur la tourte, les bougies rouges représentent 7 ans et les bougies vertes 5 ans. Sur le vacherin, les bougies bleues représentent 8 ans et les bougies jaunes 3 ans. Chaque dessert permet de connaître l'âge de Francine. »
L'un des invités est daltonien, donc incapable de différencier les couleurs. Tout ce qu'il voit, c'est 7 bougies sur chacun des desserts.
Quel âge avait Francine lors de cet anniversaire ?

d) Catherine a actuellement 1780 bougies. Il ne lui manque que celles d'une année où elle était en voyage le jour de son anniversaire.
Quel âge avait-elle l'année où elle n'a pas conservé ses bougies ?

e) Aster n'a jamais mis de côté des bougies et est décédé à 88 ans. Cependant, il savait calculer. Un jour, il dit ceci à ses filles : « Si j'avais conservé toutes les bougies de mes anniversaires, depuis l'année de mon mariage jusqu'à aujourd'hui, j'en aurais 2323. »
A quel âge Aster s'est-il marié ?

Solutions

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \underline{\mathbf{55}}$.

b) On vu au point a) que 10 ans correspondent à 55 bougies. On a 66 bougies à 11 ans, 78 bougies à 12 ans, 91 bougies à 13 ans, 105 bougies à 14 ans et 120 bougies à 15 ans.
Ginette avait **15 ans**.

c) Dans les tableaux suivants, R représente les bougies rouges, V les vertes, B les bleues et J les jaunes.
Seul l'âge de 41 ans est identique dans les deux tableaux. Francine avait donc **41 ans**.

Tourte		
R	V	Age
7	0	$7\cdot7=49$
6	1	$6\cdot7+1\cdot5=47$
5	2	$5\cdot7+2\cdot5=45$
4	3	43
3	4	41
2	5	39
1	6	37
0	7	35

Vacherin		
B	J	Age
7	0	$7\cdot8=56$
6	1	$6\cdot8+1\cdot3=51$
5	2	$5\cdot8+2\cdot3=46$
4	3	41
3	5	34
2	5	36
1	6	31
0	7	26

d) Observons le tableau suivant. On constate que le nombre total de bougies mises de côté en n années correspond à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Age = nombre de bougies par année	1	2	3	4	5	...	n
Nombre total de bougies	1	3	6	10	15	...	$\frac{n(n+1)}{2}$

Soit x, l'âge de Catherine lorsqu'elle était en voyage et n son âge actuel.

Equation : $\frac{n(n+1)}{2} - x = 1780 \Rightarrow n\,(n+1) - 3560 = 2x$.

$59 \cdot 60 - 3560 = -20$ (impossible).

$60 \cdot 61 - 3560 = 100$.

Age de Catherine lorsqu'elle n'a pas conservé des bougies = 100 : 2 = **50**.

e) Soit n, le nombre d'années pendant lesquelles Aster aurait conservé ses bougies, et x, son âge lorsqu'il s'est marié. Construisons un tableau.

Ligne A : Numéro des années pendant lesquelles il a conservé ses bougies.

Ligne B : Nombre de bougies conservées, par année, de gauche à droite.

Ligne C : Nombre de bougies conservées, par année, comme la ligne B, mais de droite à gauche.

Ligne D : Somme des bougies des lignes B et C, pour chaque colonne.

A	1	2	3	…	n – 2	n – 1	n
B	x	x + 1	x + 2	…	x + n – 3	x + n – 2	x + n – 1
C	x + n – 1	x + n – 2	x + n – 3	…	x + 2	x + 1	x
D	2x + n – 1	2x + n – 1	2x + n – 1		2x + n – 1	2x + n – 1	2x + n – 1

En additionnant toutes les cases de D, on obtient $n \cdot (2x + n - 1)$, ce qui correspond à deux fois le nombre total de bougies conservées par Aster. Alors, $n \cdot (2x + n - 1) = 4646$.

$4646 = 2 \cdot 23 \cdot 101$. Alors, $n \cdot (2x + n - 1) = 46 \cdot 101$ ou $23 \cdot 202$.

Il est évident que n ne peut valoir que 46 ou 23.

Si n = 46, on a $2x + 45 = 101 \Rightarrow x = 28$ et $x + n - 1 = 73$.

Si n = 23, on a $2x + 22 = 202 \Rightarrow x = 90$. Cela est impossible.

Aster s'est marié à **28 ans**.

Age d'Aster lorsqu'il a raconté cette histoire = 28 + 46 – 1 = 73 ans.

Augustin Genoud