

179. L'année olympique 2024 *** **** *****

Un ordinateur a été programmé pour écrire sur un immense écran tous les nombres entiers dans un ordre croissant, les uns à la suite des autres, à partir de 1. Le début est donc 1234567891011121314... Dans cette suite de nombres, on peut voir, par exemple, les nombres 45, 891 et 1112.

- Quel nombre vient d'apparaître sur l'écran lorsque l'on peut voir pour la 2e fois le nombre 2024 dans la liste ?
- Dans la liste de tous les nombres à 5 chiffres écrits sur l'écran, combien de fois peut-on voir le nombre 2024 ?
- Combien de fois aurait-on pu voir le nombre 2024 dans la liste si l'ordinateur avait été programmé pour arrêter son travail après avoir écrit le nombre 999'999 ?
- Quel nombre vient d'apparaître sur l'écran lorsque l'on peut lire dans la liste le nombre 2024 pour la 2024e fois ?

Solutions

- a) La première apparition de 2024 se trouve quand l'ordinateur écrit le nombre 2024. La 2e apparition vient lorsque l'ordinateur écrit **2421**. En effet, le nombre qui précède 2421 est 2420. Dans 24202421, il y a bien 2024.

- b), c) et d) Supposons que chaque nombre de la suite soit suivi d'une virgule : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...

Dans les parenthèses comprenant m et n (m-n), m indique le nombre de cas où on peut lire 2024 dans un cas particulier et n, le nombre total de cas obtenus jusque-là.

On ne peut lire 2024 que dans trois cas :

A = 2024 appartient à un nombre de la suite

B = 2024 appartient à deux nombres consécutifs de la suite dont le premier est du type 24x20 (x représente les éventuels chiffres intercalés entre 24 et 20).

C = 2024 appartient à deux nombres consécutifs de la suite dont le premier est du type 4x202 (x représente les éventuels chiffres intercalés entre 4 et 202).

Par la suite, lorsque 2024 appartient à deux nombres consécutifs (cas B et C), seul le premier nombre est noté.

Nombres à 4 chiffres :

A → 2024 (1-1).

B → 2420 (1-2).

C → 4202 (1-3).

Nombres à 5 chiffres :

A → 12024, 22024, 32024, ..., 92024 (9-12) + 20240, 20241, 20242, ..., 20249 (10-22).

B → 24020, 24120, 24220, ..., 24920 (10-32).

C → 40202, 41202, 42202, ..., 49202 (10-42).

Nombre de fois où 2024 apparaît dans les nombres à 5 chiffres = 9 + 10 + 10 + 10 = **39**. C'est la réponse à la question b).

Nombres à 6 chiffres :

A → ab2024, avec ab allant de 10 à 99 (90-132) + a2024b, avec a allant de 1 à 9 et pour chaque a, b allant de 0 à 9 (90-222) + 2024ab, avec ab allant de 00 à 99 (100-322).

B → 24ab20, avec ab allant de 00 à 99 (100-422).

C → 4ab202, avec ab allant de 00 à 99 (100-522).

Réponse à la question c) : si l'ordinateur s'était arrêté à 999'999, on aurait pu voir **522 fois** le nombre 2024.

Nombres à 7 chiffres :

A1	abc2024 ; abc allant de 100 à 999	900 cas
A2	ab2024c ; ab allant de 10 à 99 ; pour chaque ab, c va de 0 à 9	900 cas
A3	a2024bc ; a allant de 1 à 9 ; pour chaque a, bc va de 00 à 99	900 cas
A4	2024abc ; abc allant de 000 à 999	1000 cas
B	24abc20 ; abc allant de 000 à 999	1000 cas
C	4abc202 ; avec abc allant de 000 à 999	1000 cas

D'après le tableau ci-dessus, le nombre cherché est forcément un nombre à 7 chiffres.

Parmi les nombre à 7 chiffres, comptabilisons tous ceux qui commencent par 1 : il y en a 100 dans A1, 100 dans A2 et 100 dans A3 (300-822). Le nombre cherché est forcément un nombre à 7 chiffres commençant par 2.

Parmi les nombres à 7 chiffres, si on comptabilise ceux qui commencent par 2 et dont les deux premiers chiffres sont inférieurs ou égaux à 24, on en trouve déjà 1000 dans A4 et 1000 dans B (2000-2822). Dans ce cas, on a trop de nombres.

Parmi les nombre à 7 chiffres, comptabilisons tous ceux qui commencent par 2 et dont les deux premiers chiffres sont inférieurs ou égaux à 23 : il y en a 40 dans A1, 40 dans A2, 100 dans A3 et 1000 dans A4 (1180-2002). Il manque 22 fois 2024. On en trouve 21 dans B : 1) 2400020 ; 2) 2400120 ; ... ; 21) 2402020. Le 22e est dans A1 : 2402024.

Lorsque l'on peut lire dans la liste le nombre 2024 pour la 2024e fois, l'ordinateur vient d'écrire le nombre **2'402'024**.

Augustin Genoud