

170. Les piles électriques ** *** *****

Grand-père est un farceur. Il a posé des boîtes sur une table et a mis dans chaque boîte un certain nombre de piles électriques toutes identiques parmi lesquelles se trouvent deux piles défectueuses. Il nous a mis à disposition une lampe de poche sans pile qui s'allume lorsque les deux piles qu'on y insère sont en bon état et il aimerait que l'on découvre les deux piles défectueuses de chaque boîte uniquement à l'aide de la lampe.

Un test consiste à mettre deux piles dans la lampe. C'est aussi remplacer une pile par une autre.

Combien faut-il effectuer de tests, au minimum et dans le pire des cas, pour trouver les piles défectueuses lorsque dans une boîte, il y a :

- a) 3 piles ?
- b) 4 piles ?
- c) 5 piles ?
- d) 6 piles ?
- e) 7 piles ?
- f) 8 piles ?
- g) 51 piles ?

Pour trouver les deux piles défectueuses, il a fallu effectuer 59 tests.

- h) Combien y avait-il de piles dans la boîte ?

Solutions

Les piles seront nommées par les lettres A, B, C, etc. La lampe qui contient les piles A et B sera notée la lampe AB. Dans la suite, une pile donnée en exemple peut souvent être remplacée par une autre pile ; de même un couple de piles testées peut souvent être échangé par un autre couple de piles.

Une pile en bon état = une bonne pile.

- a) Parmi les piles A, B et C, il n'y a qu'une seule bonne pile.

La lampe ne s'allumera jamais. **Il n'y a aucun moyen de trouver les deux piles défectueuses.**

- b) Parmi les piles A, B, C et D, il y a 2 bonnes piles.

On teste AB et CD (2 tests). Deux cas peuvent se présenter.

- 1) Une seule lampe s'allume (AB) \Rightarrow les deux piles défectueuses sont C et D.
- 2) Aucune lampe ne s'allume. Il y a forcément une seule pile défectueuse dans AB et une seule pile défectueuse dans CD. Quatre couples de piles peuvent encore être testés (AC, AD, BC et BD). Dès que la lampe s'allume, on connaît les deux piles défectueuses. Dans le pire des cas, il faut encore effectuer 3 tests.

Le nombre minimum de tests est **5**.

- c) Parmi les piles A, B, C, D et E, il y a 3 bonnes piles.

On teste AB et CD (2 tests). Un seul cas va se présenter : une seule lampe s'allume (AB). Il faut 2 tests supplémentaires (AC et AD) pour trouver les deux piles défectueuses. Par exemple, si la lampe s'allume avec AC et ne s'allume pas avec AD, les 2 lampes défectueuses sont D et E.

Le nombre minimum de tests est **4**.

- d) Parmi les piles A, B, C, D, E et F, il y a 4 bonnes piles.

On teste AB, CD et EF (3 tests). Deux cas peuvent se présenter.

- 1) Deux lampes s'allument (AB et CD) \Rightarrow les deux piles défectueuses sont E et F.
- 2) Une seule pile s'allume (AB). Il y a forcément 1 seule pile défectueuse parmi CD et 1 seule pile défectueuse parmi EF. Il faut 2 tests supplémentaires (AC et AE) pour trouver les 2 piles défectueuses.

Le nombre minimum de tests est **5**.

- e) Parmi les piles A, B, C, D, E, F et G, il y a 5 bonnes piles.
 On teste AB, CD et EF (3 tests). Deux cas peuvent se présenter :
- 1) Deux piles se sont allumées (AB et CD) \Rightarrow Il faut deux tests supplémentaires (AE et AF) pour trouver les deux piles défectueuses.
 - 2) Une seule pile s'est allumée (AB). Il y a forcément 1 seule pile défectueuse parmi CD et 1 seule pile défectueuse parmi EF. Il faut 2 tests supplémentaires (AC et AE) pour trouver les 2 piles défectueuses.

Le nombre minimum de tests est **5**.

- f) Parmi les piles A, B, C, D, E, F, G et H, il y a 6 bonnes piles.
 On teste successivement AB, CD, EF et GH (4 tests). Deux cas peuvent se présenter :
- 1) Trois piles se sont allumées (AB, CD et EF) \Rightarrow Les 2 piles défectueuses sont G et H.
 - 2) Deux piles se sont allumées (AB et CD). Il y a forcément 1 pile défectueuse parmi EF et 1 pile défectueuse parmi GH. Il faut 2 tests supplémentaires (AE et AG) pour trouver les 2 piles défectueuses.

Le nombre minimum de tests est **6**.

En continuant la recherche, on trouve que le nombre minimum de tests pour détecter les deux piles défectueuses, dans le pire des cas, est de 6 pour 9 piles, de 7 pour 10 piles, de 7 pour 11 piles, de 8 pour 12 piles, etc.

Soit n , le nombre de piles dans la boîte et $n \geq 5$, alors le nombre minimum de tests, dans le pire des cas, pour détecter les deux piles défectueuses correspond à $\frac{n+4}{2}$ si n est pair et à $\frac{n+3}{2}$ si n est impair.

g) $n = 51 \Rightarrow \frac{51+3}{2} = \mathbf{27 \text{ tests}}$.

h) Il y aura forcément deux réponses possibles.

$$\frac{n+4}{2} = 59 \Rightarrow n = \mathbf{114 \text{ piles}} ; \frac{n+3}{2} = 59 \Rightarrow n = \mathbf{115 \text{ piles}}$$