

### 169. Les déplacements des jetons \* \* \* \* \*

Joël joue avec des grilles composées de cases carrées et comportant autant de lignes que de colonnes. Au départ, il place un jeton par case, à l'exception de la case du bas à droite qui est vide. Un jeton ne peut être déplacé que sur une case vide voisine, par un mouvement horizontal ou vertical. Un coup consiste à déplacer un jeton d'une case.

En combien de coups, au minimum, peut-il amener le jeton qui est sur la case du haut à gauche, à la case vide du bas à droite, lorsqu'il joue avec une grille comportant :

- a) 3 lignes ?

●	●	●
●	●	●
●	●	

- b) 4 lignes ?  
 c) 5 lignes ?  
 d) n lignes (n supérieur à 1) ?

### Solutions

Les déplacements indiqués ne sont pas les seuls possibles. Le jeton A est celui qui se trouve au départ dans la case du haut à gauche.

- a) Il faut 4 coups pour obtenir les positions de la 2e grille : déplacements des jetons f, c, b puis A. Il faut 3 coups pour obtenir les positions de la 3e grille : déplacement des jetons d, e puis A, etc. Une stratégie consiste à déplacer successivement A d'une case à droite, puis d'une case en dessous, puis d'une case à droite, puis d'une case en dessous, etc.

Départ		
A	b	c
d	e	f
g	h	

4 coups		
	A	b
d	e	c
g	h	f

3 coups		
d		b
e	A	c
g	h	f

3 coups		
d	b	c
e		A
g	h	f

3 coups		
d	b	c
e	h	
g	f	A

Il faut **13 coups** (4 + 3 + 3 + 3), au minimum, pour amener le jeton A en bas à droite.

- b) Il faut déplacer les 5 jetons marqués d'une croix dans la grille de départ, ainsi que le jeton A pour mettre le jeton A dans la position de la 2e grille. Il faut ensuite à chaque fois 3 coups pour que A puisse aller successivement à la position 1 indiquée dans la 3e grille, puis à la position 2, puis à la position 3, etc. On voit que la stratégie utilisée en a) fonctionne toujours : on déplace successivement A d'une case à droite, puis d'une case en dessous, puis d'une case à droite, etc.

Départ			
A	x	x	x
			x
			x

6 coups			
	A	x	x
			x
			x
			x

15 coups			
	1	2	
		3	4
			5

Depuis la 2e grille, il faut 15 coups pour amener A en bas à droite.

Nombre minimum de coups = 6 + 15 = **21**.

- c) En utilisant la même stratégie, on constate qu'il faut 8 coups, pour déplacer A d'une case vers la droite. Il faut 3 coups pour descendre A d'une case. Il faut 3 coups pour déplacer A d'une case vers la droite, etc. On voit le cheminement de A sur le croquis ci-contre.

Il faut **29 coups** (8 + 7 · 3), au minimum, pour amener le jeton A en bas à droite.

	A			
	A	A		
		A	A	
			A	A
				A

d) Nombre minimum de coups :

$$\text{Grille de 3 lignes} = 4 + 3 \cdot 3 = 13$$

$$\text{Grille de 4 lignes} = 6 + 5 \cdot 3 = 21$$

$$\text{Grille de 5 lignes} = 8 + 7 \cdot 3 = 29$$

$$\text{Grille de 6 lignes} = 10 + 9 \cdot 3 = 37$$

$$\text{Grille de } n \text{ lignes} = (2n - 2) + (2n - 3) \cdot 3 = 2n - 2 + 6n - 9 = \underline{\underline{8n - 11}}.$$