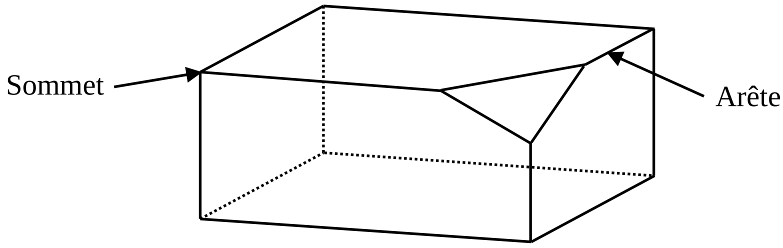
167. Des polyèdres et un ballon ** ***

Un polyèdre est un solide dont toutes les faces sont des polygones (figures planes limitées uniquement par des segments).

Un polyèdre est convexe si chaque segment joignant deux quelconques de ses points est entièrement inclus dans la portion d'espace qu'il délimite. Il ne possède donc pas de creux ou de cavités.

a) Combien ce parallélépipède rectangle tronqué possède-t-il de faces, de sommets et d'arêtes ?



b) La base d'une pyramide est un pentagone régulier.

Combien cette pyramide possède-t-elle de faces, de sommets et d'arêtes ?

c) Le grand homme de science suisse Leonhard Euler (1707 – 1783) a établi une relation valable pour tous les polyèdres convexes. Si F = nombre de faces, S = nombre de sommets et A = nombre d'arêtes, alors F + S – A = x.

Que vaut x ?

d) Pour fabriquer un ballon de foot, une possibilité est de prendre un certain nombre de polygones en cuir, de les relier entre eux par des coutures, afin d'obtenir un polyèdre convexe hermétique. Une vessie de caoutchouc est mise à l'intérieur de cet objet qui peut être gonflé au moyen d'une valve, formant alors une sphère plus ou moins réussie.

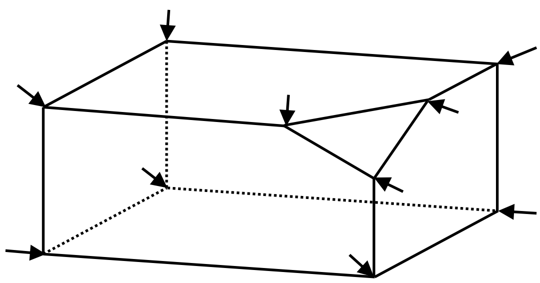
Imaginons six morceaux de cuir identiques de formes carrées, reliés entre eux pour former un cube. En gonflant ce cube, on obtiendrait un objet ressemblant vaguement à un ballon.

Pendant de nombreuses années, les ballons de foot ont été fabriqués à partir de 20 hexagones réguliers et d'un certain nombre de pentagones réguliers. Chaque pentagone était entouré de 5 hexagones et chaque hexagone était entouré de 3 pentagones et de 3 hexagones, comme on peut le voir sur le ballon ci-contre.

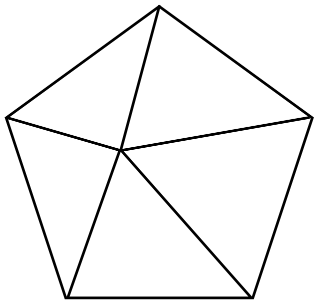
- Quelle est la longueur totale des coutures, dans le cas où toutes les arêtes mesurent 4,2 cm ?
- Avant de gonfler le ballon, nous avions un polyèdre convexe. Combien possédait-il de sommets ?

Solutions

a) Le morceau coupé ajoute une face à un parallélépipède rectangle non tronqué. Ce polyèdre convexe possède **7 faces**, **10 sommets** (au bout de chaque flèche) et **15 arêtes** (tous les segments reliant deux flèches).



b) Cette pyramide n'est pas forcément régulière, mais elle a obligatoirement 5 faces latérales triangulaires. Elle possède donc **<u>6 faces</u>**. En regardant cette pyramide depuis dessus, on constate qu'elle possède **<u>6 sommets</u>** et **<u>10 arêtes</u>**.



c) La valeur de x peut être trouvée à l'aide des polyèdres convexes utilisés aux points a) et b).

Au point a), F + S – A = 7 + 10 – 15 = 2.

Au point b), F + S – A = 6 + 6 – 10 = 2.

Alors, x = **<u>2</u>**.

d) Etant donné que chaque hexagone touche 3 pentagones, 20 hexagones touchent 60 pentagones. Comme chaque pentagone est entouré de 5 hexagones, chaque pentagone est comptabilisé 5 fois. Alors, ce ballon est fabriqué avec 12 pentagones (60 : 5).

Chaque arête appartient à deux pièces. Nombre total d'arêtes = $\left(20 \cdot 6 + 12 \cdot 5\right) : 2$ = 90.

Longueur totale des coutures = $90 \cdot 4,2$ = **<u>378 cm</u>**.

On sait que le nombre d'arêtes est de 90. Utilisons la formule d'Euler pour trouver le nombre de sommets. F + S – A = 2 = 32 + S – 90 ⇒ S = 2 + 90 – 32 = **<u>60</u>**.

On aurait pu trouver le nombre de sommets en sachant que chaque pentagone a 5 sommets et que chaque hexagone en a 6. D'autre part, chaque sommet appartient à 3 polygones. Alors, le nombre de sommets est égal au résultat de $\left(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6\right) : 3$, soit 60.

Aujourd'hui, le cuir a complètement disparu dans la fabrication d'un ballon de foot. Il a été remplacé par divers matériaux rendant le ballon plus solide, plus lisse, plus souple et plus sphérique.

Il est impossible de fabriquer un ballon de foot uniquement avec des pièces hexagonales identiques.

Le philosophe et mathématicien grec Platon (428 – 348 avant Jésus-Christ) avait découvert qu'il n'existait que cinq polyèdres à la fois réguliers et convexes : le tétraèdre (4 faces triangulaires), le cube (6 faces carrées), l'octaèdre (8 faces triangulaires), le dodécaèdre (12 faces pentagonales) et l'icosaèdre (20 faces triangulaires).