159. Les pièces de monnaie * ** * **** *****

Albert et Benoît ont posé sur une table x de pièces de monnaie et vont ôter des pièces à tour de rôle. Albert qui joue toujours le premier doit enlever un nombre de pièces supérieur à 0, mais inférieur à x.
Ensuite, chacun doit enlever au minimum une pièce, mais au maximum le double de pièces prises par son adversaire le coup précédent. Celui qui prend la dernière pièce gagne. Les deux joueurs jouent toujours parfaitement.
Qui gagne, lorsque le nombre de pièces au départ est de :

a) 2 pièces ?
b) 3 pièces ?
c) 4 pièces ?
d) 5 pièces ?

Albert et Benoît ont continué de jouer en disposant au départ chaque fois une pièce supplémentaire et se sont arrêtés à 8 pièces.

e) De 2 à 8 pièces, quels ont été les nombres de pièces au départ qui ont permis à Benoît de gagner ?
f) Il existe une stratégie parfaite pour ce jeu. Elle s'appuie sur le théorème de Zeckendorf (1901 – 1983) qui énonce ceci : Tout entier naturel plus grand que zéro peut s'écrire de manière unique comme la somme de nombres de Fibonacci non consécutifs. Enoncez cette stratégie.

Solutions

Rappel : après le 1er coup, chaque joueur ne peut pas ôter plus de pièces que le double de pièces prises par son adversaire le coup précédent.

a) Albert ne peut enlever qu'une pièce. **Benoît gagne** en prenant la seconde pièce.
b) Si Albert enlève 1 pièce, Benoit en prend 2 et gagne. Si Albert ôte 2 pièces, Benoît prend la dernière et gagne. **Benoît gagne**.
c) Albert peut prendre 1, 2 ou 3 pièces à son premier coup.
   S'il prend 2 ou 3 pièces, il perd car, dans chaque cas, Benoît peut ôter les pièces restantes. S'il prend une seule pièce, Benoît peut en prendre 1 ou 2. Quel que soit le choix de Benoît, Albert peut ôter toutes les pièces restantes. **Albert gagne** en prenant 1 pièce à son premier coup.
d) Albert peut prendre 1, 2, 3 ou 4 pièces à son premier coup. S'il prend 2, 3 ou 4 pièces, Benoît gagne car il peut enlever toutes les pièces restantes à sa première prise. Si Albert prend 1 pièce, Benoît peut en prendre 1 ou 2. Si Benoît en prend 2, il perd. Si Benoît en prend 1, Albert ne peut pas terminer le jeu, mais Benoît le peut dans le coup suivant.
   Benoît gagne quelle que soit la stratégie d'Albert.
e) Jeu avec 6 pièces
   Albert peut prendre 1, 2, 3, 4, ou 5 pièces à son premier coup. S'il prend 2 pièces ou plus, Benoît gagne en prenant toutes les pièces restantes. Si Albert prend une seule pièce. Benoît se retrouve avec 5 pièces devant lui et il peut ôter 1 ou 2 pièces. Si Benoît ôte 2 pièces, il perd. Si Benoît prend 1 pièce, Albert en prend aussi 1 et Benoît va perdre quoi qu'il fasse à son second coup. Albert gagne en prenant 1 pièce à son 1er coup.

   Jeu avec 7 pièces
   Albert peut prendre 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pièces à son premier coup. S'il prend 3 pièces ou plus, Benoît gagne en prenant toutes les pièces restantes. En prenant 2 pièces au départ, Albert fait que Benoît se retrouve avec 5 pièces devant lui. Benoît est contraint de prendre 1 seule pièce s'il ne veut pas qu'Albert ôte toutes les pièces à son 2^{e} coup. Albert se retrouve avec 4 pièces. Il doit en enlever qu'une seule pour que Benoît ne puisse pas prendre toutes les pièces restantes ensuite. Albert gagne en prenant 2 pièces à son premier coup. Si Albert prend une seule pièce au départ, Benoît en prend aussi une et Albert va finir par perdre.

Jeu avec 8 pièces

Benoît gagne à son premier coup si Albert commence par prendre plus de 2 pièces. Si Albert ne prend qu'une pièce au départ, Benoît en prend 2 et met Albert dans une situation perdante comme à l'exercice d). Si Albert prend 2 pièces au départ, Benoît en prend 1 et Albert se retrouve à nouveau dans la même situation perdante qu'à l'exercice d). Benoît gagne quelle que soit la stratégie d'Albert.

Benoît gagne lorsqu'il y a au départ 2, 3, 5 et 8 pièces.

f) La donnée précise qu'il existe une stratégie parfaite qui s'appuie sur le théorème de Zeckendorf dans lequel les nombres de Fibonacci jouent un rôle.

Voici pour rappel les premiers nombres de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 (chacun à partir de 3, est la somme des deux nombres qui le précède). On a vu au point e) que Benoît gagne lorsqu'il y a au départ 2, 3, 5 et 8 pièces. Ce sont tous des nombres de Fibonacci.

Décomposons tous les entiers naturels compris entre 1 et 40 comme une somme unique de nombres de Fibonacci non consécutifs :

1 = 1	11 = 8 + 3	21 = 21	31 = 21 + 8 + 2
2 = 2	12 = 8 + 3 + 1	22 = 21 + 1	32 = 21 + 8 + 3
3 = 3	13 = 13	23 = 21 + 2	33 = 21 + 8 + 3 + 1
4 = 3 + 1	14 = 13 + 1	24 = 21 + 3	34 = 34
5 = 5	15 = 13 + 2	25 = 21 + 3 + 1	35 = 34 + 1
6 = 5 + 1	16 = 13 + 3	26 = 21 + 5	36 = 34 + 2
7 = 5 + 2	17 = 13 + 3 + 1	27 = 21 + 5 + 1	37 = 34 + 3
8 = 8	18 = 13 + 5	28 = 21 + 5 + 2	38 = 34 + 3 + 1
9 = 8 + 1	19 = 13 + 5 + 1	29 = 21 + 8	39 = 34 + 5
10 = 8 + 2	20 = 13 + 5 + 2	30 = 21 + 8 + 1	40 = 34 + 5 + 1

Lorsque les deux joueurs jouent parfaitement, le premier joueur perd uniquement lorsque le nombre de pièces au départ appartient pas à un nombre de Fibonacci (des preuves peuvent être trouvées sur le net en recherchant *Jeu de Nim Fibonacci*).

Voici les meilleures stratégies :

A) Au départ, le nombre de pièces n'appartient pas à un nombre de Fibonacci (Albert gagne)

- 1er coup d'Albert : enlever un nombre de pièces qui correspond au plus petit des nombres de la décomposition de Zeckendorf. Par exemple, Albert prend 2 pièces lorsqu'il y a 20 pièces au départ.
- Coups suivants d'Albert : prendre, si c'est possible, toutes les pièces restantes. Sinon, enlever un nombre de pièces qui correspond au plus petit nombre de la décomposition de Zeckendorf par rapport au nombre de pièces encore en jeu.

B) Au départ, le nombre de pièces appartient à un nombre de Fibonacci (Albert perd)

Si Albert ne veut pas que Benoît puisse prendre toutes les pièces restantes à son premier coup, il est obligé de mettre Benoît devant un nombre de pièces qui ne correspond pas à un nombre de Fibonacci. Dans ce cas, Benoît applique la stratégie vue en A) et gagne.

Dans ce jeu, contrairement à la majorité des jeux de Nim (jeux qui se jouent à deux et qui aboutissement forcément à un gagnant), on ne peut pas établir une liste de positions perdantes dans lesquelles il suffit de maintenir son adversaire pour gagner.

Sur le web, en cherchant « Nim Fibonacci », vous trouverez facilement une application vous permettant de tester les stratégies données ici.

– Augustin Genoud, mars 2023 –