159. Les pièces de monnaie * ** * **** *****

Albert et Benoît ont posé sur une table n pièces de monnaie puis doivent en ôter un certain nombre, à tour de rôle. Albert joue toujours le premier. Lors de sa première prise, il doit enlever un nombre de pièces supérieur à 0, mais inférieur à n.

Ensuite, chacun doit enlever au minimum une pièce, mais au maximum le double de pièces prises par son adversaire le coup précédent. Celui qui prend la dernière pièce gagne. Les deux joueurs jouent toujours parfaitement.

Qui gagne, lorsque le nombre de pièces au départ est de :

(Lorsqu'Albert gagne, donner également le nombre de pièces ôtées lors de sa première prise)

a) 3 pièces ?
b) 4 pièces ?
c) 5 pièces ?
d) 6 pièces ?
e) 7 pièces ?

Il existe une stratégie parfaite pour ce jeu. Elle s'appuie sur le théorème de Zeckendorf (1901 – 1983) qui énonce ceci : Tout entier naturel plus grand que zéro peut s'écrire de manière unique comme la somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.

f) Enoncez cette stratégie.
g) Il y a 32 pièces au départ. Qui va gagner ? Combien de pièces va prendre Albert lors de sa première prise ? Combien de pièces va prendre Albert lors de sa seconde prise si Benoît a enlevé 4 pièces lors de sa première prise ?

Solutions

Rappel : après le 1er coup, chaque joueur ne peut pas ôter plus de pièces que le double de pièces prises par son adversaire le coup précédent.

a) Si Albert enlève 1 pièce, Benoit en prend 2 et gagne. Si Albert ôte 2 pièces, Benoît prend la dernière et gagne. **Benoît gagne**.
b) Albert peut prendre 1, 2 ou 3 pièces lors de sa première prise.
   S'il prend 2 ou 3 pièces, il perd car, dans chaque cas, Benoît peut ôter les pièces restantes. S'il prend une seule pièce, Benoît peut en prendre 1 ou 2. Quel que soit le choix de Benoît, Albert peut ôter ensuite toutes les pièces restantes. **Albert gagne**. Il doit prendre **1 pièce** lors de sa première prise.
c) Albert peut prendre 1, 2, 3 ou 4 pièces lors de sa première prise.
   - S'il prend 2, 3 ou 4 pièces, Benoît gagne car il peut enlever toutes les pièces restantes lors de sa première prise.
   - S'il prend 1 pièce, Benoît peut en prendre 1 ou 2. Si Benoît en prend 2, il perd. Si Benoît en prend 1, Albert ne peut pas terminer le jeu, mais Benoît le peut lors de la prise suivante.

   Benoît gagne quelle que soit la stratégie d'Albert.
d) Albert peut prendre 1, 2, 3, 4, ou 5 pièces lors de sa première prise.
   - S'il prend 2 pièces ou plus, Benoît gagne en prenant toutes les pièces restantes.
   - S'il prend une seule pièce. Benoît se retrouve avec 5 pièces devant lui et il peut ôter 1 ou 2 pièces. Si Benoît ôte 2 pièces, il perd. Si Benoît prend 1 pièce, Albert en prend aussi 1 et Benoît va perdre quoi qu'il fasse lors de sa seconde prise.

   Albert gagne en prenant **1 pièce** lors de sa première prise.
e) Albert peut prendre 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pièces lors de sa première prise.
   - S'il prend 3 pièces ou plus, Benoît gagne en prenant toutes les pièces restantes.
   - S'il prend 2 pièces, Benoît se retrouve avec 5 pièces devant lui. Benoît est contraint de prendre 1 seule pièce s'il ne veut pas qu'Albert ôte toutes les pièces lors de sa 2e prise. Albert se retrouve avec 4 pièces. Il doit en enlever qu'une seule pour que Benoît ne puisse pas prendre

toutes les pièces restantes ensuite. Albert peut prendre toutes les pièces restante lors de sa 3e prise. Ainsi, **Albert gagne** en prenant **2 pièces** lors de sa première prise.

- S'il prend une seule pièce lors de sa première prise, Benoît en prend aussi une et Albert va finir par perdre car il se retrouve avec 5 pièces devant lui comme Benoît dans le paragraphe précédent.

f) La donnée précise qu'il existe une stratégie parfaite qui s'appuie sur le théorème de Zeckendorf dans lequel les nombres de Fibonacci jouent un rôle.

Voici pour rappel les premiers nombres de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 (chacun à partir de 3, est la somme des deux nombres qui le précède). On a vu que Benoît gagne lorsqu'il y a au départ 2, 3 ou 5 pièces. Ce sont tous des nombres de Fibonacci.

Décomposons tous les entiers naturels compris entre 1 et 40 comme une somme unique de nombres de Fibonacci non consécutifs :

1 = 1	11 = 8 + 3	21 = 21	31 = 21 + 8 + 2
2 = 2	12 = 8 + 3 + 1	22 = 21 + 1	32 = 21 + 8 + 3
3 = 3	13 = 13	23 = 21 + 2	33 = 21 + 8 + 3 + 1
4 = 3 + 1	14 = 13 + 1	24 = 21 + 3	34 = 34
5 = 5	15 = 13 + 2	25 = 21 + 3 + 1	35 = 34 + 1
6 = 5 + 1	16 = 13 + 3	26 = 21 + 5	36 = 34 + 2
7 = 5 + 2	17 = 13 + 3 + 1	27 = 21 + 5 + 1	37 = 34 + 3
8 = 8	18 = 13 + 5	28 = 21 + 5 + 2	38 = 34 + 3 + 1
9 = 8 + 1	19 = 13 + 5 + 1	29 = 21 + 8	39 = 34 + 5
10 = 8 + 2	20 = 13 + 5 + 2	30 = 21 + 8 + 1	40 = 34 + 5 + 1

Lorsque les deux joueurs jouent parfaitement, le premier joueur perd uniquement lorsque le nombre de pièces au départ appartient pas à un nombre de Fibonacci (des preuves peuvent être trouvées sur le net en recherchant *Jeu de Nim Fibonacci*).

Voici les meilleures stratégies :

A) Au départ, le nombre de pièces n'appartient pas à un nombre de Fibonacci (Albert gagne)
   - 1ère prise d'Albert : enlever un nombre de pièces qui correspond au plus petit des nombres de la décomposition de Zeckendorf. Par exemple, Albert prend 2 pièces lorsqu'il y a 20 pièces au départ.
   - Prises suivantes d'Albert : prendre, si c'est possible, toutes les pièces restantes. Sinon, enlever un nombre de pièces qui correspond au plus petit nombre de la décomposition de Zeckendorf par rapport au nombre de pièces encore en jeu.

B) Au départ, le nombre de pièces appartient à un nombre de Fibonacci (Albert perd)

   Si Albert ne veut pas que Benoît puisse prendre toutes les pièces restantes lors de sa première prise, il est obligé de mettre Benoît devant un nombre de pièces qui ne correspond pas à un nombre de Fibonacci. Dans ce cas, Benoît applique la stratégie vue en A) et gagne.

g) 32 n'étant pas un nombre de Fibonacci (32 = 21 + 8 + 3), c'est **Albert** qui va gagner. Il va prendre **3 pièces** lors de sa première prise. Benoît ôte 4 pièces. Il reste 25 pièces (25 = 21 + 3 + 1) en jeu. Benoît doit enlever **1 pièce** lors de sa seconde prise.

Dans ce jeu, contrairement à la majorité des jeux de Nim (jeux qui se jouent à deux et qui aboutissement forcément à un gagnant), on ne peut pas établir une liste de positions perdantes dans lesquelles il suffit de maintenir son adversaire pour gagner.

Sur le web, en cherchant « Nim Fibonacci », vous trouverez facilement une application vous permettant de tester les stratégies données ici.