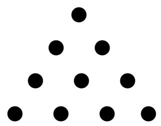
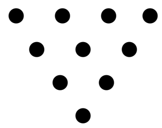
157. Les boutons * ** * **** *****

Avec 10 boutons, Jules a construit le triangle suivant qui contient 4 boutons par côté :



En ne déplaçant qu'un minimum de boutons du triangle qu'il vient de construire, il a établi le triangle inversé suivant :



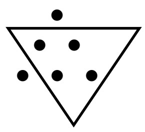
Sachant que tous les triangles de cette énigme sont construits de la même manière, combien faut-il déplacer de boutons, au minimum, pour obtenir le triangle inversé d'un triangle contenant au départ :

a) 3 boutons par côté ?
b) 5 boutons par côté ?
c) 8 boutons par côté ?
d) 16 boutons par côté ?
e) 999 boutons par côté ?

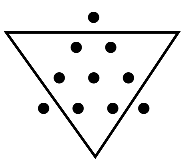
Solutions

Pour chaque solution donnée, il faut déplacer les boutons qui sont à l'extérieur du triangle et les mettre à l'intérieur du triangle, aux emplacements qui conviennent.

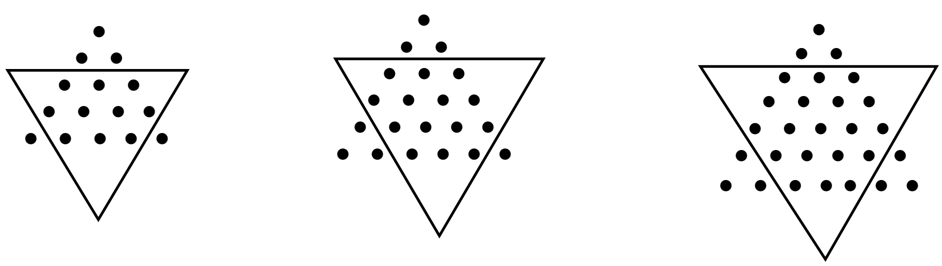
a) Il suffit de déplacer **2 boutons**.



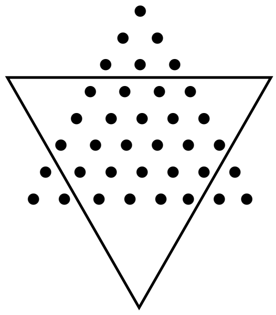
Pour un triangle de 4 boutons par côté, il faudrait déplacer 3 boutons.



b) Pour 5 boutons par côté, il faut déplacer **5 boutons**. Pour 6 boutons par côté, il faut déplacer 7 boutons. Pour 7 boutons par côté, il faut déplacer 9 boutons.

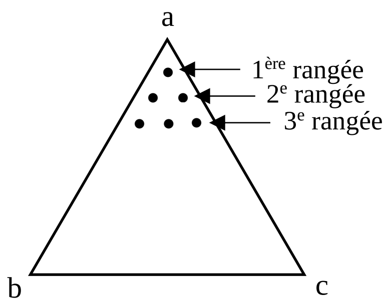


c) Avec 8 boutons par côté, il faut déplacer **12 boutons**.



d) Pour comprendre de quels boutons on parle, on va s'aider du triangle équilatéral suivant qui contient un certain nombre de boutons. Seules trois rangées de boutons sont dessinées du côté a.

a1 : le bouton de la première rangée du côté a.
b1 : le bouton de la première rangée du côté b.
c1 : le bouton de la première rangée du côté c.
a2 : les deux boutons de la 2^e rangée du côté a.
b2 : les deux boutons de la 2^e rangée du côté b.
c2 : les deux boutons de la 2^e rangée du côté c.
a3 : les trois boutons de la 3^e rangée du côté a.
Etc.



En observant ce qui a été fait jusqu'ici, on constate qu'en passant d'un triangle de n boutons par côté à un triangle de n + 1 boutons par côté, il faut ajouter tous les boutons d'une rangée supplémentaire pour obtenir le nouveau nombre minimum de boutons à déplacer.
Pour un triangle de 2 boutons par côté, il faut déplacer le bouton a1.
Pour un triangle de 3 boutons par côté, il faut déplacer les boutons a1 et b1.
Pour un triangle de 4 boutons par côté, il faut déplacer les boutons a1, b1 et c1.
Pour un triangle de 5 boutons par côté, il faut déplacer les boutons a1, b1, c1 et a2.
Pour un triangle de 6 boutons par côté, il faut déplacer les boutons a1, b1, c1, a2 et b2.
Etc.
On peut alors aisément compléter le tableau suivant dans lequel A indique le nombre de boutons par côté d'un triangle et B le nombre minimum de boutons à déplacer.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…	n
B	0	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35	40	45	…	

Pour 16 boutons par côté, il faut déplacer **45 boutons**.

e) Existe-t-il une fonction polynomiale liant A et B du tableau précédent ? La méthode des différences (voir explications dans la rubrique E de mon site www.jeuxmath.ch) n'aboutit à rien si on prend tous les couples. Cependant, si on prend uniquement les couples dont les seconds membres correspondent à 0, 3, 9, 18, 18, 30 et 45, la méthode des différences nous indique que nous avons affaire à une fonction du 2^e degré égale à $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(1) = a + b + c = 0$; $f(4) = 16a + 4b + c = 3$; $f(7) = 49a + 7b + c = 9$.

La résolution de ce système d'équations nous conduit à $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{6}$ et $c = -\frac{1}{3}$.

Donc, $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$.

Le nombre minimum de boutons à déplacer, quel que soit le nombre de boutons par côté, correspond à l'entier le plus proche de $\frac{x^2 + x - 2}{6}$. Alors, f (999) = **166'500**.

– Augustin Genoud, janvier 2023 –