

**153. L'agence de tourisme \*\* \*\*\* \*\*\*\*\***

La directrice d'une agence de tourisme a l'habitude de préparer succinctement divers projets d'activités. A différents moments de la journée, elle dépose des projets dans le casier de la secrétaire, toujours au sommet de la pile et jamais plus d'un à la fois. La secrétaire, lorsqu'elle le souhaite, prend le projet qui est au sommet de la pile pour le mettre au propre. La secrétaire doit finir la mise au propre des projets dans la journée.

Dans une journée, combien y a-t-il d'ordres différents de mise au propre des projets si la directrice a déposé :

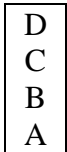
- a) Trois projets dans l'ordre suivant : A, B et C ?
- b) Quatre projets dans l'ordre suivant : A, B, C et D ?
- c) Cinq projets dans l'ordre suivant : A, B, C, D et E ?

**Solutions**

L'ordre de mise au propre du projet A puis de C et enfin de B sera symbolisé par ACB.

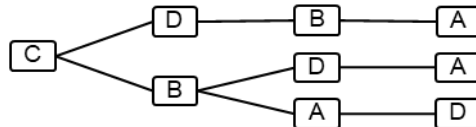
- a) Pour mettre au propre les trois projets, il existe 6 possibilités différentes si on ne tient pas compte des exigences de la donnée : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA. Parmi ces possibilités, seul le cas CAB est impossible. En effet, si la secrétaire commence par le projet C qui est au sommet de la pile (dernier projet déposé par la directrice), elle ne peut pas ensuite s'occuper du projet A qui est au bas de la pile. Il y a donc **5 ordres différents** de mise au propre.

- b) Si les quatre projets ont été déposés sans que la secrétaire ne les touche, la pile se présente ainsi :

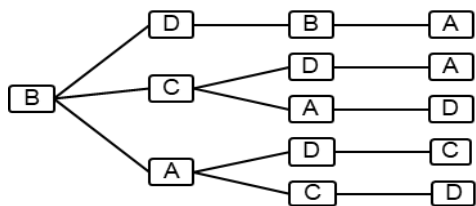


Si la secrétaire commence par le projet D, elle n'a qu'une seule possibilité : DCBA.

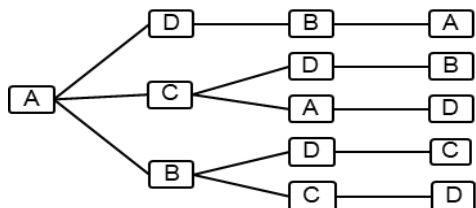
Si la secrétaire commence par le projet C, elle a 3 possibilités :



Si la secrétaire commence par le projet B, elle a 5 possibilités :



Si la secrétaire commence par le projet A, elle a 5 possibilités :



Nombre total d'ordres différents : 1 + 3 + 5 + 5 = **14**.

- c) Si la secrétaire commence par le projet E, elle n'a qu'une seule possibilité : ABCDE.  
 Si la secrétaire commence par le projet D, elle a 4 possibilités : DECBA, DCEBA, DCBAE et DCBEA.  
 Si la secrétaire commence par le projet C, elle a 9 possibilités : CEDBA, CDEBA, CDBEA, CDBAE, CBEDA, CBDEA, CBDAE, CBAED et CBADE.  
 Si la secrétaire commence par le projet B, elle a 14 possibilités : BEDCA, BDECA, BDCEA, BDCAE, BCEDA, BCDEA, BCDAE, BCAED, BCADE, BAEDC, BADEC, BADCE, BACED et BACDE.  
 Si la secrétaire commence par le projet A, elle a 14 possibilités : AEDCB, ADECB, ADCEB, ADCBE, ACEDB, ACDEB, ACDBE, ACBED, ACBDE, ABEDC, ABDEC, ABDCE, ABCED et ABCDE.  
 Nombre total d'ordres différents :  $1 + 4 + 9 + 14 + 14 = \underline{42}$ .

Si  $n$  est le nombre de projets, alors le nombre d'ordres différents de mise au propre correspond à  $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ . Voir à ce sujet, sur le net, la suite de Catalan qui fait référence au mathématicien belge Eugène Charles Catalan (1814 – 1894).