

152. Les cyclopes *****

Une île n'est habitée que par des cyclopes qui, comme chacun le sait, n'ont qu'un seul œil. Une malédiction fait que le jour où un cyclope peut déduire avec certitude la couleur de son œil, il meurt dans la nuit qui suit.

Les cyclopes ne voient pas pendant la nuit et, durant la journée, ils n'ont aucun moyen de discerner la couleur de leur œil (pas de miroirs, pas de reflets, ...). Comme ils ne veulent pas faire mourir leurs semblables, ils ne parlent jamais de la couleur de l'œil de quiconque.

Le matin du 1er janvier 2022, un missionnaire de passage, annonça aux 40 cyclopes vivant sur cette île que l'un d'eux, au moins, avait un œil bleu.

Des cyclopes moururent dans la nuit du 9 au 10 janvier 2022.

Combien de cyclopes n'avaient pas un œil bleu le 1er janvier 2022 ?

Solution

Le matin du 1er janvier, les cyclopes apprennent que l'un d'eux, au moins, a un œil bleu. Cette information est essentielle pour démarrer le raisonnement par récurrence qui va suivre. En effet, sans cette information, s'il n'y avait qu'un seul cyclope avec un œil bleu sur cette île, ce cyclope n'aurait pas eu moyen de connaître la couleur de son œil. La donnée ne nous dit rien d'autre sur les couleurs des yeux des cyclopes. Il y a peut-être des cyclopes avec un œil vert, rouge, jaune...

Attribuons des numéros aux 40 cyclopes : 1, 2, 3, 4, ..., 38, 39 et 40.

Cas A. Supposons qu'il n'y ait qu'un seul cyclope (le 1) avec un œil bleu, le matin du 1er janvier.

Le 1er janvier, comme le 1 ne voit aucun autre œil bleu, il sait que c'est lui qui a un œil bleu et qu'il va mourir dans la nuit de 1er au 2 janvier. Les autres cyclopes ne peuvent pas savoir la couleur de leur œil.

Le 2 janvier, tous les cyclopes restants constatent que le 1 est mort. Les 39 autres cyclopes savent maintenant que le 1 était le seul avec un œil bleu et ils n'ont aucun moyen de connaître la couleur de leur œil. Aucun cyclope ne mourra dans la nuit du 9 au 10 janvier.

Cas B. Supposons qu'il n'y ait que deux cyclopes (1 et 2) avec un œil bleu, le matin du 1er janvier.

Le 1er janvier, le 1 ne voit qu'un seul œil bleu. Il se dit que s'il n'a pas un œil bleu, le 2 fera le même raisonnement que dans le cas A où il n'y avait qu'un seul cyclope avec un œil bleu et le 2 mourra la nuit prochaine. Le 2 tient le même raisonnement que le 1.

Le 2 janvier, le 1 constate que le 2 n'est pas mort. Il sait donc qu'il a aussi un œil bleu. Le 2, par le même raisonnement, sait aussi qu'il a un œil bleu.

Les 1 et 2 meurent dans la nuit du 2 au 3 janvier. Les survivants savent maintenant qu'il n'y a que deux cyclopes avec un œil bleu et ils n'ont aucun moyen de connaître la couleur de leur œil. Aucun cyclope ne mourra dans la nuit du 9 au 10 janvier.

Cas C. Supposons qu'il n'y ait que trois cyclopes (1, 2 et 3) avec un œil bleu, le matin du 1er janvier.

Le 1er janvier, le 1 ne voit que deux cyclopes avec un œil bleu. Il se dit que s'il n'a pas un œil bleu, les 2 et 3 feront le même raisonnement que dans le cas B, et alors, les 2 et 3 mourront dans la nuit du 2 au 3 janvier.

Le 3 janvier, le 1 constate que les 2 et 3 ne sont pas morts. Il sait donc qu'il a aussi un œil bleu. Les 2 et 3 font exactement le même raisonnement que le 1.

Les 1, 2 et 3 meurent dans la nuit du 3 au 4 janvier. Les survivants savent maintenant qu'il n'y a que trois cyclopes avec un œil bleu et ils n'ont aucun moyen de connaître la couleur de leur œil. Aucun cyclope ne mourra dans la nuit du 9 au 10 janvier.

Le même raisonnement peut être continué à l'infini. Résumons :

Un seul cyclope avec un œil bleu \Rightarrow ce cyclope meurt dans la nuit du 1 au 2 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil.

Deux cyclopes exactement avec un œil bleu \Rightarrow Ces deux cyclopes meurent dans la nuit du 2 au 3 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil.

Trois cyclopes exactement avec un œil bleu \Rightarrow Ces trois cyclopes meurent dans la nuit du 3 au 4 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil. Etc.

Neuf cyclopes exactement avec un œil bleu \Rightarrow Ces neuf cyclopes meurent dans la nuit du 9 au 10 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil.

Le matin du 1er janvier, il y avait **31 cyclopes** (40 – 9) qui n'avaient pas un œil bleu.