149. Qui veut gagner des euros ? * ** * ******

Dans un jeu télévisé, un joueur est placé devant un certain nombre de portes alignées les unes à côté des autres. Derrière une de ces portes, il y a au départ 300 euros qu'un joueur peut espérer gagner à condition d'ouvrir la porte derrière laquelle se trouve l'argent.

Tout joueur sait qu'après chaque essai raté le montant est diminué de 10 euros et est déplacé discrètement derrière une porte adjacente.

Quel montant maximal un joueur est-il sûr de gagner, s'il joue parfaitement, en ayant droit à autant d'essais que voulu, lorsqu'il se trouve face à un jeu comptant :

a) 3 portes ?
b) 4 portes ?
c) 5 portes ?
d) 9 portes ?

Solutions

Numérotons les portes (1, 2, 3...) et mettons un x devant chaque porte derrière laquelle l'argent peut être caché. Le choix des joueurs est indiqué par des cases ombrées.

a) Avant le 1er essai, l'argent peut être derrière chacune des portes. Le joueur ouvre la 2^{e} porte. S'il ne gagne pas les 300 euros, il sait que l'argent est derrière la 1ère ou la 3^{e} porte. Le montant ne peut être déplacé que derrière la 2^{e} porte. Au 2e essai, le joueur ouvre à nouveau la 2^{e} porte et va gagner **<u>290 euros</u>**.

	1	2	3	Montants
1er essai	x	x	x	300
2^{e} essai		x		290

b) Le joueur ouvre la 2^{e} porte. S'il ne gagne pas, il sait que le montant est derrière les portes 1 ou 3 ou 4. Après déplacement du montant, les portes derrière lesquelles peuvent se trouver les euros sont les numéros 2 ou 3 ou 4 (ligne du 2^{e} essai). Au 2^{e} essai, le joueur ouvre la 3^{e} porte. Si ce n'est pas la bonne, l'argent, après déplacement, ne peut plus aller que derrière la 1ère ou la 3^{e} porte. Au 3^{e} essai, le joueur essaie la 3^{e} porte. S'il ne gagne pas, le montant est déplacé forcément derrière la 2^{e} porte.

	1	2	3	4	Montants
1er essai	x	x	x	x	300
2^{e} essai		x	x	x	290
3^{e} essai	x		x		280
4^{e} essai		x			270

En choisissant la 2^{e} porte à son 4^{e} essai, le joueur est certain de pouvoir gagner **<u>270 euros</u>**.

c) Au début, la meilleure solution ne peut être trouvée qu'en faisant de multiples essais. Ensuite, une stratégie semble se dessiner. En face de 5 portes, le joueur est assuré de gagner **<u>250 euros</u>**.

	1	2	3	4	5	Montants
1er essai	x	x	x	x	x	300
2^{e} essai		x	x	x	x	290
3^{e} essai	x		x	x	x	280
4^{e} essai		x		x		270
5^{e} essai	x		x			260
6^{e} essai		x				250

d) Il semble que pour chaque porte supplémentaire, le gain diminue de 20 euros. Alors, lorsque le jeu comporte 9 portes, le gain assuré est de **170 euros** ($250 - 4 \cdot 20$).

Vérifions :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Montants
1er essai	x	x	x	x	x	x	x	x	x	300
2e essai		x	x	x	x	x	x	x	x	290
3e essai	x		x	x	x	x	x	x	x	280
4e essai		x		x	x	x	x	x	x	270
5e essai	x		x		x	x	x	x	x	260
6e essai		x		x		x	x	x	x	250
7e essai	x		x		x		x	x	x	240
8e essai		x		x		x		x		230
9e essai	x		x		x		x			220
10e essai		x		x		x				210
11e essai	x		x		x					200
12e essai		x		x						190
13e essai	x		x							180
14e essai		x								170

La stratégie appliquée est maintenant claire. Si on a n portes, on ouvre successivement les portes 2, 3, 4, ..., n – 2, n – 1, n – 1, n – 2, ..., 4, 3 et 2. A partir de 3 portes, le nombre d'essais pour s'assurer un gain maximal est égal à 2 (n – 2).