

148. Les clés ****

La direction d'une grande entreprise comprend une directrice, un directeur-adjoint et cinq chefs de service. Cette entreprise dispose d'un coffre-fort dans lequel se trouvent des documents ultra secrets. Ce coffre est muni d'un certain nombre de serrures qui doivent être toutes ouvertes pour accéder au coffre. Chaque clé n'ouvre qu'une seule serrure.

Les membres de la direction ont reçu un certain nombre de clés de manière que :

- La directrice peut ouvrir le coffre toute seule ;
- Le directeur-adjoint ne peut ouvrir le coffre que s'il est accompagné d'un de ses chefs de service ;
- Les chefs de service ne peuvent ouvrir le coffre que s'ils sont trois.

Combien existe-t-il de serrures, au minimum ?

Solution

Soit D la directrice, DA le directeur-adjoint et a, b, c, d et e les chefs de service.

Numérotons les serrures : 1, 2, 3,..., n. Admettons que les numéros des clés correspondent aux numéros des serrures.

La 3^e condition, celle qui concerne les chefs de service, nous permet d'affirmer ceci :

- a et b ne peuvent pas ouvrir le coffre tout seuls car ils ne possèdent pas la clé 1. La clé 1 doit être en possession de c, d et e pour que la serrure 1 puisse être ouverte.
- a et c ne peuvent pas ouvrir le coffre tout seuls car ils ne possèdent pas la clé 2 qui est forcément en possession de b, d et e.

On continue ainsi le même raisonnement.

- a et d ne possèdent pas la clé 3 qui est forcément en possession de b, c et e.
- a et e ne possèdent pas la clé 4 qui est forcément en possession de b, c et d.
- b et c ne possèdent pas la clé 5 qui est forcément en possession de a, d et e.
- b et d ne possèdent pas la clé 6 qui est forcément en possession de a, c et e.
- b et e ne possèdent pas la clé 7 qui est forcément en possession de a, c et d.
- c et d ne possèdent pas la clé 8 qui est forcément en possession de a, b et e.
- c et e ne possèdent pas la clé 9 qui est forcément en possession de a, b et d.
- d et e ne possèdent pas la clé 10 qui est forcément en possession de a, b et c.

Le bilan de la situation est donné dans le tableau suivant dans lequel les croix indiquent les clés détenues par chacun des chefs de service.

Clé →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a					x	x	x	x	x	x
b		x	x	x				x	x	x
c	x		x	x		x	x			x
d	x	x		x	x		x		x	
e	x	x	x		x	x		x		

Notre coffre aurait eu un minimum de 10 serrures si la seule condition imposée était celle des chefs de service. Le nombre 10 correspond au nombre de fois que l'on a deux chefs de services différents parmi cinq chefs de service. Il s'agit d'une combinaison simple dont la formule

correspond à $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.

Pour que la condition imposée par le directeur-adjoint soit satisfaite, avec un minimum de serrures, il suffit d'ajouter une 11^e serrure puis de distribuer la clé 11 à tous les chefs de service et les clés 1 à 10 au directeur-adjoint. Bien sûr, la directrice devra posséder toutes les clés.

La situation finale peut être représentée ainsi :

Clé →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a					x	x	x	x	x	x	x
b		x	x	x				x	x	x	x
c	x		x	x		x	x			x	x
d	x	x		x	x		x		x		x
e	x	x	x		x	x		x			x
DA	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
D	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Il existe donc **11 serrures** au minimum.