147. Les apéritifs ** *** ****

Sur une petite île, pendant les vacances d'août, chaque adulte s'est vu attribuer un numéro : Un, Deux, Trois, Quatre, Cinq, etc.

Remarque : mathématiquement, dire qu'une personne a trinqué avec 3 personnes n'interdit pas qu'elle ait trinqué avec plus de 3 personnes. Dans cette énigme, par souci de simplification, dire qu'une personne a trinqué avec x personnes signifie que cette personne a trinqué avec exactement x personnes.

a) Lors d'un apéritif réunissant 4 personnes, monsieur « Un » a trinqué avec une personne, madame « Deux » avec 2 personnes et monsieur « Trois » a trinqué avec 3 personnes.

   Avec combien de personnes madame « Quatre » a-t-elle trinqué ?

b) Lors d'un apéritif réunissant 7 personnes, monsieur « Un » a trinqué avec une personne, madame « Deux » avec 2 personnes, monsieur « Trois » avec 3 personnes, et ainsi de suite, jusqu'à madame « Six » qui a trinqué avec 6 personnes.

   Avec combien de personnes monsieur « Sept » a-t-il trinqué ?

c) Lors d'un apéritif réunissant 131 personnes, monsieur « Un » a trinqué avec une personne, madame « Deux » avec 2 personnes, monsieur « Trois » avec 3 personnes, et ainsi de suite, jusqu'à madame « Cent trente » qui a trinqué avec 130 personnes.

   Avec combien de personnes monsieur « Cent trente-et-un » a-t-il trinqué ?

Solutions

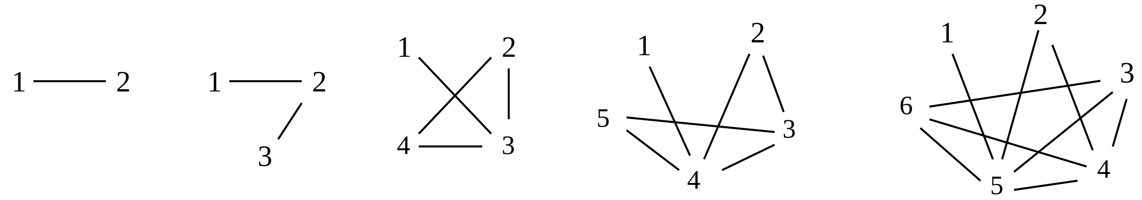
a) On constate qu'il y a une constante dans les trois exercices. Le nombre de fois que trinque une personne correspond toujours à son numéro sauf pour la dernière personne dont la question est de savoir avec combien de personnes elle a trinqué. Cette constatation nous incite, comme souvent, à rechercher les solutions en allant du plus simple au plus compliqué.

   Par souci de simplification, par la suite, les personnes ne seront plus représentées que par leur numéro (numéros pairs pour les dames et impairs pour les hommes).

   S'il n'y avait que deux personnes à l'apéritif, 2 n'aurait trinqué qu'avec une seule personne.

   S'il n'y avait que trois personnes à l'apéritif, 3 n'aurait trinqué qu'avec une seule personne. En effet, 2 ayant trinqué avec exactement deux personnes, elle aurait forcément trinqué avec 1 et 3, et toutes les conditions de la donnée seraient satisfaites.

   Lorsqu'il y a quatre personnes à l'apéritif, 4 trinque avec **2 personnes**. Comme 3 a trinqué avec 3 personnes, il a forcément trinqué avec 1, 2 et 4. Sur le croquis qui concerne 4 personnes, on relie 3 à 1, 2 et 4. 1 et 3 ne peuvent plus être reliés à d'autres personnes. 2 ayant trinqué avec 2 personnes, elle ne peut plus être reliée qu'à 4 et toutes les conditions de la donnée sont satisfaites.



   Les croquis précédents illustrent les situations dans les cas où l'apéritif concerne 2, 3, 4, 5 et 6 personnes.

   Lorsque que n personnes sont présentent dans un apéritif, il faut toujours commencer par regarder ce qui se passe avec la personne portant le numéro n −1, puis avec la personne ayant le numéro n – 2, puis avec la personne portant le numéro n – 3, etc.

b) 6 ayant trinqué avec 6 personnes, elle a forcément trinqué avec 1, 2, 3, 4, 5 et 7. Les 1 et 6 ont rempli les conditions de la donnée, plus personne ne peut trinquer avec eux.

5 ayant trinqué avec 5 personnes, il a forcément trinqué avec, en plus de 6, les 2, 3, 4 et 7. 2 et 5 ont aussi rempli les conditions de la donnée, plus personne ne peut trinquer avec eux.

4 ayant trinqué avec 4 personnes, elle a forcément trinqué avec, en plus de 5 et 6, les 3 et 7. 3 et 4 ayant aussi rempli les conditions de la donnée, plus personne ne peut trinquer avec eux. On constate à ce moment-là, que tous ont rempli les conditions de la donnée.

7 a donc trinqué avec 6, 5 et 4, soit avec **3 personnes**.

Récapitulons dans le tableau suivant ce que l'on a trouvé jusqu'ici.

Nombre total de personnes	2	3	4	5	6	7
Nombre de fois qu'a trinqué la dernière personne	1	1	2	2	3	3

c) Complétons le tableau suivant. A = numéro de celle ou celui qui trinque. B = numéros avec qui le numéro noté dans la colonne A trinque.

130 trinque avec tous, sauf avec lui-même. Les numéros 1 et 130 ne peuvent plus trinquer. Ils sont éliminés.

129 trinque avec tous les restants, sauf avec lui-même. Les numéros 2 et 129 sont éliminés. Etc.

	A	B	Eliminés
a	130	Tous sauf 130	1 et 130
b	129	Tous les restants	2 et 129
	128	Tous les restants	3 et 128
	127	Tous les restants	4 et 127
	…	…	…
	67	Tous les restants	64 et 67
	66	Tous les restants	65 et 66

Le 131 a trinqué avec tous les numéros allant de 130 à 66, soit avec **65 personnes**.

Lorsque l'apéritif se déroule de la même manière et qu'il y a n adultes sur l'île, le nombre de fois qu'a trinqué le numéro n est égal à la valeur entière de $\frac{n}{2}$. Cette règle pouvait déjà être imaginée à partir du tableau construit en b).