

144. La tour de Pise ** *** *****

La célèbre tour penchée de Pise mesure environ 56 m de haut.

Des expériences sont réalisées depuis cette tour, en lâchant une balle. On constate que la balle remonte toujours d'un dixième de sa hauteur de chute.

- A quelle hauteur la balle a-t-elle été lâchée sachant qu'elle a parcouru 48 mètres au moment où elle a touché le sol pour la 2^e fois ?
- Quelle distance a effectuée la balle, lâchée d'une hauteur de 50 mètres, à l'instant où elle touche le sol pour la 4^e fois ?
- La balle a été lâchée d'une hauteur de 36 mètres. Quelle distance totale a-t-elle parcourue avant de s'arrêter au sol ?

Solutions

- a) Soit x , la hauteur de départ. La balle va descendre jusqu'au sol, rebondir jusqu'à une certaine hauteur et redescendre de cette même hauteur.

Soit x , la hauteur de départ. Equation : $x + 2 \cdot \frac{x}{10} = 48$. Alors, $10x + 2x = 480 = 12x \Rightarrow x = 40$.

Hauteur cherchée = **40 mètres**.

- b) Le 1^{er} contact avec le sol a lieu après 50 m.

La balle rebondit de 5 m. Il y a 10 m entre le 1^{er} et le 2^e contact avec le sol.

La balle rebondit de 0,5 m. Il y a 1 m entre le 2^e et le 3^e contact avec le sol.

La balle rebondit de 0,05 m. Il y a 0,1 m entre le 3^e et le 4^e contact avec le sol.

Distance effectuée par la balle = $50 + 10 + 1 + 0,1 = \mathbf{61,10 \text{ mètres}}$.

- c) Comme la balle rebondit théoriquement indéfiniment, on pourrait croire que la distance parcourue est infinie. Cependant, une somme infinie de nombres positifs peut donner un résultat fini, ce qui est le cas ici.

$$\text{Distance totale} = 36 + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 36 + 2 \cdot \frac{1}{100} \cdot 36 + 2 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 36 + 2 \cdot \frac{1}{10000} \cdot 36 + \dots =$$

$$36 + 72 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right).$$

La série $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right)$ est convergente et vaut $\frac{1}{9}$. En effet,

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right) = 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots = 0,1111\dots = 0,\bar{1} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Distance totale} = 36 + 72 \cdot \frac{1}{9} = \mathbf{44 \text{ mètres}}.$$