137. Les sabliers de Rayan * ** * ****

Rayan possède deux sabliers, l'un de 5 minutes (petit sablier) et l'autre de 9 minutes (grand sablier). Il a réussi à mesurer 16 minutes uniquement au moyen de ces deux sabliers.



Comment a-t-il fait si, une fois qu'il a commencé les manipulations :

a) Lors de son premier essai, cela lui a pris 25 minutes ?
b) Lors de son 2e essai, cela lui a pris 21 minutes ?
c) Lors de son 3e essai, cela lui a pris 16 minutes ?

Note : le temps de retournement d'un sablier est toujours considéré comme nul.

Solutions

Dire qu'un sablier est vide sous-entend que la partie du haut est vide.

A chaque essai, Rayan a fait démarrer simultanément les deux sabliers (les parties du bas vides), puis dès que l'un d'eux était vide, il le retournait. Dans les tableaux qui suivent, on trouve les durées en minutes pour chaque sablier et à la ligne du haut on a le nombre de retournements des sabliers.

a) Rayan a noté dans le tableau quand il retournait chaque sablier et a mesuré 16 minutes (25 – 9) depuis le moment où il a retourné le grand sablier pour la 2e fois (après 9 minutes) jusqu'au moment où il a retourné le petit sablier pour la 6e fois.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Petit sablier	5	10	15	20	25	30	35	40	…
Grand sablier	9	18	27	36	45	54	63	72	…

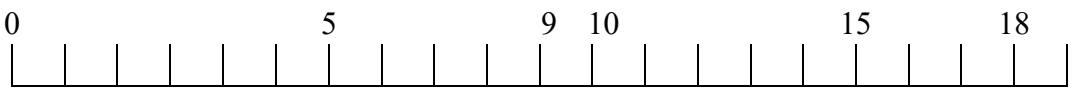
b) A la 18e minute du grand sablier, Ryan a retourné aussi le petit sablier qui s'était vidé pendant 3 minutes (de la 15e à la 18e minute). Le petit sablier s'est alors vidé en 3 minutes. Ryan a mesuré 16 minutes (21 – 5) depuis le moment où il a retourné le petit sablier pour la 2e fois jusqu'au moment où il allait retourner le petit sablier pour la 6e fois.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Petit sablier	5	10	15	18	21	26	31	36	…
Grand sablier	9	18	27	36	45	54	63	72	…

Rayan aurait pu retourner le grand sablier à la 15e minute du petit sablier. A ce moment-là, le grand sablier se serait vidé pendant 6 minutes (15 – 9). Il se viderait à nouveau en 6 minutes. 16 minutes auraient pu être mesurées entre le temps 5 du petit sablier et le temps 21 du grand sablier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Petit sablier	5	10	15	20	25	30	35	40	…
Grand sablier	9	15	21	30	39	48	57	66	…

c) Voici une stratégie intéressante qui va nous permettre de mesurer diverses durées avec deux sabliers. Commençons par dessiner une règle sur laquelle on inscrit les multiples de 5 et de 9.



Sur cette règle, on voit que l'on peut mesurer 1 minute, de 9 à 10 ; 3 minutes, de 15 à 18 ; 13 minutes, de 5 à 18 ; etc. Mais pour mesurer 16 minutes en 16 minutes, c'est un peu plus compliqué.

Représentons les quantités de sable des sabliers sous forme de fractions. Ainsi, $\frac{0}{3}$ signifie que notre petit sablier est vide. Dès qu'on le retourne, on obtient $\frac{3}{0}$. Deux minutes plus tard, on a $\frac{1}{2}$.

Pour indiquer l'état de nos deux sabliers, nous noterons, par exemple, $\left(\frac{4}{1};\frac{3}{6}\right)$, la fraction de gauche indiquant l'état du petit sablier et celle de droite celui du grand sablier.

Sur notre règle, il y a 4 minutes d'écart entre les temps 9 et 5. Au temps 9, l'état de nos sabliers vaut $\left(\frac{1}{4};\frac{0}{9}\right)$. Dès ce moment, si on retourne les deux sabliers chaque fois que l'un d'eux est vide, on peut mesurer des durées par intervalles de 4 minutes (9 – 5). Schématiquement, on a ceci : $\left(\frac{1}{4};\frac{0}{9}\right)=\left(\frac{4}{1};\frac{9}{0}\right)4' \rightarrow \left(\frac{0}{5};\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{5}{0};\frac{4}{5}\right)4' \rightarrow \left(\frac{1}{4};\frac{0}{9}\right)=\left(\frac{4}{1};\frac{9}{0}\right)$, etc.

Sur notre règle, il y a 1 minute d'écart entre les temps 10 et 9. Au temps 10, l'état de nos sabliers vaut $\left(\frac{0}{5};\frac{8}{1}\right)$. Dès ce moment, si on retourne les deux sabliers chaque fois que l'un d'eux est vide, on peut mesurer des durées par intervalles de 1 minute (10 – 9). Schématiquement, on a ceci : $\left(\frac{0}{5};\frac{8}{1}\right)=\left(\frac{5}{0};\frac{1}{8}\right)1' \rightarrow \left(\frac{4}{1};\frac{0}{9}\right)=\left(\frac{1}{4};\frac{9}{0}\right)1' \rightarrow \left(\frac{0}{5};\frac{8}{1}\right)$, etc.

Pour obtenir les 16 minutes cherchées, Ryan peut donc, au temps 10, retourner systématiquement les deux sabliers chaque fois que l'un d'eux est vide, soit aux temps 10, 11, 12, 13, 14 et 15. Après les retournements au temps 15, le premier sablier qui deviendra vide indiquera les 16 minutes voulues.

Cette stratégie est valable à chaque temps t noté sur notre règle, les durées des intervalles correspondant au dénominateur de l'état du sablier qui n'est pas vide.

Par exemple, pour t = 18, on a $\left(\frac{2}{3};\frac{0}{9}\right)$. En appliquant notre stratégie, on peut mesurer des durées par intervalles de 3 minutes.