136. Les tombolas * ** *** ****

Combien y a-t-il eu de billets gagnants lors des tombolas suivantes où ?

a) Sur 48 billets numérotés de 1 à 48, tous les multiples de 3 et de 7 furent gagnants.

b) Sur 75 billets numérotés de 1 à 75, tous les multiples de 4, de 5 et de 6 furent gagnants.

c) Sur 3500 billets numérotés de 1 à 3500, tous les multiples de 8, de 10, de 12 et de 14 furent gagnants.

Solutions

Notons la partie entière inférieure d'un nombre x par $\lfloor x \rfloor$. Exemple : $\lfloor 2{,}87 \rfloor = 2$.

a) Il y a 20 multiples de 3 et de 7 compris entre 1 et 48 = 3, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 24, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 39, 42, 45 et 48.

   Nombre de numéros gagnants : **20**.

b) Etablissons la liste des multiples de 4, 5 et 6 parmi les numéros de 1 à 75 : 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 60, 64, 65, 66, 68, 70, 72 et 75. Il y a **35 billets gagnants**.

   Voyons une autre stratégie, pas plus efficace ici, mais qui sera utile pour résoudre le problème c).

   M4 = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68 et 72 (18 numéros).

   M5 = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70 et 75 (15 numéros).

   M6 = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66 et 72 (12 numéros).

   M4 $\cap$ M5 = 20, 40 et 60 (3 numéros).

   M4 $\cap$ M6 = 12, 24, 36, 48, 60 et 72 (6 numéros).

   M5 $\cap$ M6 = 30 et 60 (2 numéros).

   M4 $\cap$ M5 $\cap$ M6 = 60 (1 numéro).

   12 appartient à M4, M6 et M4 $\cap$ M6 et il ne doit être comptabilisé qu'une seule fois. On va le compter dans M4 et M6 et l'enlever dans M4 $\cap$ M6.

   30 appartient à M5, M6 et M5 $\cap$ M6 et il ne doit être comptabilisé qu'une seule fois. On va le compter dans M5 et M6 et l'enlever dans M5 $\cap$ M6.

   60 appartient à M4, M5, M6, M4 $\cap$ M5, M4 $\cap$ M6, M5 $\cap$ M6 et M4 $\cap$ M5 $\cap$ M6 et il ne doit être comptabilisé qu'une seule fois. On va le compter dans M4, M5 et M6, l'enlever dans M4 $\cap$ M5, M4 $\cap$ M6, et M5 $\cap$ M6 et l'ajouter dans M4 $\cap$ M5 $\cap$ M6.

   Alors, le nombre de numéros gagnants correspond à M4 + M5 + M6 – (M4 $\cap$ M5 + M4 $\cap$ M6 + M5 $\cap$ M6) + M4 $\cap$ M5 $\cap$ M6 (par souci de simplification, Mn = nombre de numéros gagnants des multiples de n).

   D'autre part, il est facile de vérifier que dans une suite de x numéros allant de 1 à x, le nombre de multiples de n est égal à $\lfloor x : n \rfloor$.

   Ainsi, nombre de multiples de 4 dans notre intervalle = $\lfloor 75 : 4 \rfloor$ = 18 ; nombre de multiples de 5 dans notre intervalle = $\lfloor 75 : 5 \rfloor$ = 15 ; etc.

   Nombre de billets gagnants = 18 + 15 + 12 – (3 + 6 + 2) + 1 = 35.

c) Soit a, le nombre de billets qui sont des multiples de 8.
Soit b, le nombre de billets qui sont des multiples de 10.
Soit c, le nombre de billets qui sont des multiples de 12.
Soit d, le nombre de billets qui sont des multiples de 14.
Soit e, le nombre de billets qui sont à la fois des multiples de 8 et de 10.
Soit f, le nombre de billets qui sont à la fois des multiples de 8 et de 12.
Etc.
Dans la colonne A, on a établi tous les groupes possibles formés par les numéros des billets gagnants.
Dans la colonne B, on trouve le plus petit multiple commun de chacun des groupes de la colonne A.
Dans la colonne C, on a le nombre de numéros gagnants de chaque nombre de la colonne B.

	A	B	C	
		x	$\lfloor 3500 : x \rfloor$	
a	8	8	a = 437	1328
b	10	10	b = 350	
c	12	12	c = 291	
d	14	14	d = 250	
e	8, 10	40	e = 87	443
f	8, 12	24	f = 145	
g	8, 14	56	g = 62	
h	10, 12	60	h = 58	
i	10, 14	70	i = 50	
j	12, 14	84	j = 41	
k	8, 10, 12	120	k = 29	69
l	8, 10, 14	280	l = 12	
m	8, 12, 14	168	m = 20	
n	10, 12, 14	420	n = 8	
o	8, 10, 12, 14	840	o = 4	4

En se référant au numéro b), on devine que le nombre de billets gagnants est égal à (a + b + c + d) – (e + f + g + h + 1 + j) + (k + l + m + n) – o = 1328 – 443 + 68 – 4 = **950**.

Prenons deux exemples pour vérifier notre stratégie.
Le numéro 840 appartient à tous les groupes du tableau précédent. Alors, (a + b + c + d) – (e + f + g + h + 1 + j) + (k + l + m + n) – o = 4 – 6 + 4 – 1 = 1.
Le numéro 600 appartient à a, b, c, e, f, h et k. Alors, (a + b + c + d) – (e + f + g + h + 1 + j) + (k + l + m + n) – o = 3 – 3 + 1 = 1.
Chaque numéro ne doit être comptabilisé qu'une seule fois, ce qui est bien le cas dans les deux exemples.