133. Le tournoi de foot *****

Les cinq équipes A, B, C, D, E disputent un tournoi dans lequel chacune joue une seule fois contre les quatre autres équipes. On sait que l'équipe A a battu C par 3 à 2 et qu'il n'y a pas eu deux scores identiques sur toutes les parties du tournoi (4 à 2 est identique à 2 à 4). Pour chaque match, on a attribué 2 points à l'équipe gagnante, 0 point à la perdante et 1 point à chacune en cas de match nul.

Dans le tableau suivant, on trouve, par ligne, pour chacune des équipes, les informations suivantes :

Dans la colonne « a », le rang ;
Dans la colonne « b », le nombre de buts marqués ;
Dans la colonne « c », le nombre de buts encaissés ;
Dans la colonne « d », le nombre de points obtenus.

Quels sont les scores de tous les matches ?

	a	b	c	d
E	1	6	5	5
C	2	8	4	4
A	3	6	7	4
B	4	4	6	4
D	5	4	6	3

Solutions

On sait que A a battu C par 3 à 2. Pour simplifier l'écriture, on notera A – C = a – c = 3 – 2.

Il reste à déterminer les scores des neuf matches suivants :

A – B = a – b	B – C = g – h	C – D = m – n
A – D = c – d	B – D = i – j	C – E = s – p
A – E = e – f	B – E = k – l	D – E = q – r

En tenant compte du fait que A a battu C par 3 à 2, on a :

Nombre de buts marqués par A = a + c + e = 3

Nombre de buts encaissés par A = b + d + f = 5

Nombre de buts marqués par B = b + g + i + k = 4

Nombre de buts encaissés par B = a + h + j + l = 6

Nombre de buts marqués par C = h + m + s = 6

Nombre de buts encaissés par C = g + n + p = 1

Nombre de buts marqués par D = d + j + n + q = 4

Nombre de buts encaissés par D = c + i + m + r = 6

Nombre de buts marqués par E = f + l + p + r = 6

Nombre de buts encaissés par E = e + k + s + q = 5

La donnée nous montre qu'il y eut 28 buts en tout. Si on enlève le match entre A et C, les neuf autres rencontres comptent 23 buts.

Comme il n'y a pas eu de scores identiques, les scores possibles sont 0 – 0 ; 1 – 0 ; 1 – 1 ; 2 – 0 ; 2 – 1 ; 2 – 2 ; 3 – 0 ; 3 – 1 ; 3 – 3 ; 4 – 0 ; 4 – 1 ; 4 – 2, etc. (tous ces scores peuvent être permutés). La somme des buts des neuf scores suivants est égale à 23 : 0 – 0 ; 1 – 0 ; 1 – 1 ; 2 – 0 ; 2 – 1 ; 2 – 2 ; 3 – 0 ; 3 – 1 et 4 – 0. Ce sont forcément les scores cherchés car tout autre score (3 – 3 ; 4 – 1 ; 4 – 2 etc.) conduirait à une somme des buts dépassant 23.

Occupons-nous des trois matches de C. Ce choix est intéressant car la somme des buts encaissés par C est égale à 1, ce qui restreint les scores possibles.

C – B = h – g ; C – D = m – n ; C – E = s – p.

Il faut que g + n + p = 1, que h + m + s = 6 et que C obtienne 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Alors, C – B ; C – D et C – E correspondent à 0 – 1 ; 4 – 0 et 2 – 0, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables.

Voyons maintenant les trois matches de A.

A – B = a – b et A – D = c – d et A – E = e – f.

Il faut que a + c + e = 3, que b + d + f = 5 et que A obtienne 2 points (1 victoire ou 2 matches nuls). Il ne reste que 6 scores permutables possibles : 0 – 0 ; 1 – 1 ; 2 – 1 ; 2 – 2 ; 3 – 0 et 3 – 1. Alors, A – B ; A – D et A – E correspondent à 2 – 2 ; 1 – 3 et 0 – 0, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables.

Voyons les matches de B.

B – A = b – a = 2 – 2 ou 3 – 1 ou 0 – 0 (selon les scores possibles de A vus précédemment)

B – C = g – h = 1 – 0 ou 0 – 2 ou 0 – 4 (selon les scores possibles de C vus précédemment)

B – D = i – j et B – E = k – l

Il faut que b + g + i + k = 4, que a + h + j + l = 6 et que B obtienne 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Alors B – A ; B – C ; B – D et B – E correspondent à 2 – 2 ; 1 – 0 ; 1 – 1 et 0 – 3, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables. Récapitulons à l'aide du tableau suivant.

C – B	0 – 1		A – B	2 – 2		B – A	2 – 2
C – D	4 – 0		A – D	1 – 3		B – C	1 – 0
C – E	2 – 0		A – E	0 – 0		B – D	1 – 1
						B – E	0 – 3

De ce tableau, on peut déduire que A – B = 2 – 2 et que B – C = 1 – 0. Inscrivons ces deux scores ainsi que celui qui était connu dès le départ dans le tableau final qui suit.

Voyons les matches de D (les scores 2 – 2 et 1 – 0 ne peuvent plus être attribués à D).

D – A = d – c = 3 – 1 ou 0 – 0 (selon les scores possibles de A vus précédemment)

D – B = j – i = 1 – 1 ou 3 – 0 (selon les scores possibles de B vus précédemment)

D – C = m – n = 0 – 4 ou 0 – 2 (selon les scores possibles de C vus précédemment)

D – E = q – r = 2 – 1 ou 1 – 2 (seuls scores encore disponibles)

Il faut que d + j + n + q = 4, que c + i + m + r = 6 et que D obtienne 3 points par 1 victoire et 1 match nul car il n'y plus la possibilité de 3 matches nuls. Ces conditions nous conduisent aux scores suivants :

D – A = 0 – 0 D – B = 3 – 0

D – C = 0 – 4 D – E = 1 – 2

On connaît maintenant 7 scores sur 10. Les trois derniers résultats (A – E ; B – E et C – E) sont faciles à trouver avec les trois derniers scores possibles (1 – 1 ; 2 – 0 et 1 – 3) et toutes les informations en notre possession.

		Points				
	Scores	A	B	C	D	E
A – B	**2 – 2**	1	1			
A – C	**3 – 2**	2		0		
A – D	**0 – 0**	1			1	
A – E	**1 – 3**	0				2
B – C	**1 – 0**		2	0		
B – D	**0 – 3**		0		2	
B – E	**1 – 1**		1			1
C – D	**4 – 0**			2	0	
C – E	**2 – 0**			2		0
D – E	**1 – 2**				0	2
		4	4	4	3	5