

### 133. Le tournoi de foot \*\*\*\*\*

Les cinq équipes A, B, C, D, E disputent un tournoi dans lequel chacune joue une seule fois contre les quatre autres équipes. On sait que l'équipe A a battu C par 3 à 2 et qu'il n'y a pas eu deux scores identiques sur toutes les parties du tournoi (4 à 2 est identique à 2 à 4). Pour chaque match, on a attribué 2 points à l'équipe gagnante, 0 point à la perdante et 1 point à chacune en cas de match nul.

Dans le tableau suivant, on trouve, par ligne, pour chacune des équipes, les informations suivantes :

Dans la colonne « I », le rang ;

Dans la colonne « II », le nombre de buts marqués ;

Dans la colonne « III », le nombre de buts encaissés ;

Dans la colonne « IV », le nombre de points obtenus.

Quels sont les scores de tous les matches ?

	I	II	III	IV
E	1	6	5	5
C	2	8	4	4
A	3	6	7	4
B	4	4	6	4
D	5	4	6	3

### Solutions

On sait que A a battu C par 3 à 2 ( $A - C = a - c = 3 - 2$ ).

Il reste à déterminer les scores des neuf matches suivants :

$$A - B = a - b \qquad B - C = g - h \qquad C - D = m - n$$

$$A - D = c - d \qquad B - D = i - j \qquad C - E = s - p$$

$$A - E = e - f \qquad B - E = k - l \qquad D - E = q - r$$

En tenant compte du fait que A a battu C par 3 à 2, on a :

$$\text{Nombre de buts marqués par A} = a + c + e = 3$$

$$\text{Nombre de buts encaissés par A} = b + d + f = 5$$

$$\text{Nombre de buts marqués par B} = b + g + i + k = 4$$

$$\text{Nombre de buts encaissés par B} = a + h + j + l = 6$$

$$\text{Nombre de buts marqués par C} = h + m + s = 6$$

$$\text{Nombre de buts encaissés par C} = g + n + p = 1$$

$$\text{Nombre de buts marqués par D} = d + j + n + q = 4$$

$$\text{Nombre de buts encaissés par D} = c + i + m + r = 6$$

$$\text{Nombre de buts marqués par E} = f + l + p + r = 6$$

$$\text{Nombre de buts encaissés par E} = e + k + s + q = 5$$

La donnée nous montre qu'il y eut 28 buts en tout. Si on enlève le match entre A et C, les neuf autres rencontres comptent 23 buts.

Comme il n'y a pas eu de scores identiques, les scores possibles sont 0 - 0 ; 1 - 0 ; 1 - 1 ; 2 - 0 ; 2 - 1 ; 2 - 2 ; 3 - 0 ; 3 - 1 ; 3 - 3 ; 4 - 0 ; 4 - 1 ; 4 - 2, etc. (tous ces scores peuvent être permutés).

La somme des buts des neuf scores suivants est égale à 23 : 0 - 0 ; 1 - 0 ; 1 - 1 ; 2 - 0 ; 2 - 1 ; 2 - 2 ; 3 - 0 ; 3 - 1 et 4 - 0. Ce sont forcément les scores cherchés car tout autre score (3 - 3 ; 4 - 1 ; 4 - 2 etc.) conduirait à une somme des buts dépassant 23.

Occupons-nous des trois matches de C. Ce choix est intéressant car la somme des buts encaissés par C est égale à 1, ce qui restreint les scores possibles.

$$C - B = h - g ; C - D = m - n ; C - E = s - p.$$

Il faut que  $g + n + p = 1$ , que  $h + m + s = 6$  et que C obtienne 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Alors, C – B ; C – D et C – E correspondent à 0 – 1 ; 4 – 0 et 2 – 0, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables.

Voyons maintenant les trois matches de A.

$$A - B = a - b \text{ et } A - D = c - d \text{ et } A - E = e - f.$$

Il faut que  $a + c + e = 3$ , que  $b + d + f = 5$  et que A obtienne 2 points (1 victoire ou 2 matches nuls).

Il ne reste que 6 scores permutables possibles : 0 – 0 ; 1 – 1 ; 2 – 1 ; 2 – 2 ; 3 – 0 et 3 – 1. Alors, A – B ; A – D et A – E correspondent à 2 – 2 ; 1 – 3 et 0 – 0, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables.

Voyons les matches de B.

$$B - A = b - a = 2 - 2 \text{ ou } 3 - 1 \text{ ou } 0 - 0 \text{ (selon les scores possibles de A vus précédemment)}$$

$$B - C = g - h = 1 - 0 \text{ ou } 0 - 2 \text{ ou } 0 - 4 \text{ (selon les scores possibles de C vus précédemment)}$$

$$B - D = i - j \text{ et } B - E = k - l$$

Il faut que  $b + g + i + k = 4$ , que  $a + h + j + l = 6$  et que B obtienne 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Alors B – A ; B – C ; B – D et B – E correspondent à 2 – 2 ; 1 – 0 ; 1 – 1 et 0 – 3, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables. Récapitulons à l'aide du tableau suivant.

C – B	0 – 1	A – B	2 – 2	B – A	2 – 2
C – D	4 – 0	A – D	1 – 3	B – C	1 – 0
C – E	2 – 0	A – E	0 – 0	B – D	1 – 1
				B – E	0 – 3

De ce tableau, on peut déduire que A – B = 2 – 2 et que B – C = 1 – 0. Inscrivons ces deux scores ainsi que celui qui était connu dès le départ dans le tableau final qui suit.

Voyons les matches de D (les scores 2 – 2 et 1 – 0 ne peuvent plus être attribués à D).

$$D - A = d - c = 3 - 1 \text{ ou } 0 - 0 \text{ (selon les scores possibles de A vus précédemment)}$$

$$D - B = j - i = 1 - 1 \text{ ou } 3 - 0 \text{ (selon les scores possibles de B vus précédemment)}$$

$$D - C = m - n = 0 - 4 \text{ ou } 0 - 2 \text{ (selon les scores possibles de C vus précédemment)}$$

$$D - E = q - r = 2 - 1 \text{ ou } 1 - 2 \text{ (seuls scores encore disponibles)}$$

Il faut que  $d + j + n + q = 4$ , que  $c + i + m + r = 6$  et que D obtienne 3 points par 1 victoire et 1 match nul car il n'y plus la possibilité de 3 matches nuls. Ces conditions nous conduisent aux scores suivants :

$$D - A = 0 - 0 \quad D - B = 3 - 0$$

$$D - C = 0 - 4 \quad D - E = 1 - 2$$

On connaît maintenant 7 scores sur 10. Les trois derniers résultats (A – E ; B – E et C – E) sont faciles à trouver avec les trois derniers scores possibles (1 – 1 ; 2 – 0 et 1 – 3) et toutes les informations en notre possession.

	Scores	Points				
		A	B	C	D	E
A – B	<b>2 – 2</b>	1	1			
A – C	<b>3 – 2</b>	2		0		
A – D	<b>0 – 0</b>	1			1	
A – E	<b>1 – 3</b>	0				2
B – C	<b>1 – 0</b>		2	0		
B – D	<b>0 – 3</b>		0		2	
B – E	<b>1 – 1</b>		1			1
C – D	<b>4 – 0</b>			2	0	
C – E	<b>2 – 0</b>			2		0
D – E	<b>1 – 2</b>				0	2
		4	4	4	3	5