

### 132. Les cubes en bois \* \*\* \*\*\*

Joaquim a peint en vert un cube en bois de 4 cm d'arête puis il l'a fait entièrement découper en petits cubes de 1 cm d'arête. Combien a-t-il obtenu de :

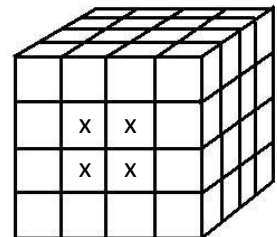
- Petits cubes ?
- Cubes peints sur trois faces ?
- Cubes n'ayant aucune face peinte ?

Mathilde, sœur de Joaquim, a peint en rouge un cube en bois ayant une arête mesurant un nombre entier de centimètres puis elle l'a fait entièrement découper en petits cubes de 1 cm d'arête. Elle remarque alors qu'elle a obtenu deux fois plus de cubes peints sur une seule face que sur exactement deux faces.

- Quelle était la longueur de l'arête de son cube initial ?

#### Solutions

- Nombre de petits cubes =  $4^3 = \mathbf{64}$ .
- Les cubes peints sur trois faces sont ceux situés aux sommets du cube. Il y en donc **8**.
- En enlevant tous les cubes peints, on obtient un petit cube de 2 cm d'arête situé entièrement à l'intérieur du cube initial. Ce cube est formé de **8** petits cubes.
- Un cube initial de 1 cm de côté n'est pas possible. Même chose pour un cube initial de 2 cm de côté car tous les petits cubes seraient peints sur trois faces.



Sur une des faces du croquis ci-contre, les petits cubes ayant une seule face peinte sont marqués par une croix (x). On aurait pu mettre ces quatre croix sur chacune des six faces. D'autre part, si on ne tient pas compte des huit petits cubes situés aux sommets du cube initial, les douze arêtes du cube initial appartiennent à des cubes ayant seulement deux faces peintes.

Le tableau ci-dessous peut être plus aisément complété si on pense que  $b + c + d + e = a$ . En effet, pour des cubes initiaux dont les arêtes sont supérieures à 1 cm, les petits cubes ont trois faces peintes ou seulement deux faces peintes ou seulement une face peinte ou aucune face peinte.

|                                     | a                      | b   | c   | d  | e                                 |
|-------------------------------------|------------------------|---|---|--|-----------------------------------|
| Mesure du côté du cube initial (cm) | Nombre de petits cubes | Nombre de petits cubes peints sur 3 faces | Nombre de petits cubes peints sur seulement 2 faces | Nombre de petits cubes peints sur seulement 1 face | Nombre de petits cubes non peints |
| 3                                   | 27                     | 8   | 12  | 6  | 1                                 |
| 4                                   | 64                     | 8   | 24  | 24   | 8                                 |
| 5                                   | 125                    | 8   | 36  | 54   | 27                                |
| 6                                   | 216                    | 8   | 48  | 96   | 64                                |
| 7                                   | 343                    | 8   | 60  | 150  | 125                               |
| n                                   | $n^3$                  | 8   | $12(n-2)$   | $6(n-2)^2$   | $(n-2)^3$                         |

Seul un cube initial de **6 cm** de côté satisfait aux conditions de la donnée. Cette solution aurait pu être trouvée en résolvant l'équation suivante :  $2 \cdot 12(n-2) = 6(n-2)^2$ .