

### 131. Les escalators \*\*\* \*\*\*\*

Un escalator (appelé aussi escalier mécanique, escalateur ou escalier roulant) est constitué de marches mobiles qui ont la particularité de rester horizontales lorsqu'il est en mouvement.

Le déplacement d'une personne sur un escalator est analogue au déplacement d'une personne dans un train qui file tout droit, à vitesse constante. Dans ces conditions, en un temps  $t$ , la distance parcourue par une personne dans un train en mouvement est la même que si le train était à l'arrêt. La vitesse de déplacement de cette personne est appelée sa **vitesse propre**. Cependant, la vitesse de cette personne par rapport à un point fixe (par exemple, un poteau au bord du rail) n'est pas la même que sa vitesse propre. Par rapport à ce point fixe, la **vitesse** est dite **réelle**.

Considérons un escalator à l'arrêt. Il possède un certain nombre de **marches visibles** qui vont d'un bout A de l'escalator à l'autre bout B. Lorsqu'il se met en mouvement, par exemple dans le sens de A vers B, on dira que des marches vont apparaître en A et que d'autres vont disparaître en B.

Dans les énigmes suivantes, on considère qu'une personne se déplaçant sur un escalator ne saute jamais une marche. D'autre part, sauf avis contraire, un escalator et ceux qui l'utilisent vont dans le même sens.

- Pour grimper un escalator à l'arrêt, Eliah met 2 minutes. Immobile sur le même escalator en fonctionnement, Eliah atteint le sommet en 1 minute.  
Combien de temps va mettre Eliah pour grimper cet escalator en mouvement ?
- Un escalator constitué de 6 marches visibles se déplace à la vitesse de 1 marche à la seconde. Naomi emprunte cet escalator à la vitesse de 2 marches à la seconde.  
Sur combien de marches va-t-elle poser ses pieds durant la montée ?
- Un escalator est constitué de 30 marches visibles. Joshua emprunte cet escalator à la vitesse de 0,8 marche à la seconde et pose ses pieds sur 12 marches pendant la montée.  
Quelle est la vitesse de l'escalator ?
- Un escalator constitué de 10 marches visibles se déplace à la vitesse de 1,4 marche à la seconde. Malia emprunte cet escalator, dans le sens contraire, à la vitesse de 1,8 marche par seconde.  
Sur combien de marches va-t-elle poser ses pieds durant sa descente ?
- Un escalator est constitué de 24 marches visibles. Dylan emprunte cet escalator, dans le sens contraire, et pose ses pieds sur 36 marches durant sa descente.  
Combien de fois la vitesse propre de Dylan est-elle supérieure à la vitesse de l'escalator ?
- Pour monter un escalator, Pascal a franchi 26 marches en 15 secondes, tandis que son épouse Kunie a gravi 22 marches en 25 secondes. A contre-sens, leur fils Théodore a descendu l'escalator en 30 secondes.  
Sur combien de marches Théodore a-t-il posé ses pieds durant sa descente ?

### Solutions

$v_e$  = vitesse de l'escalator ;  $v_p$  = vitesse propre d'une personne ;  $v_r$  = vitesse réelle d'une personne ;  
 $n$  = nombre de marches visibles de l'escalator ;  $m$  = nombre de marches sur lesquelles a posé les pieds une personne pendant son déplacement ;  $t$  = temps de déplacement d'une personne.

- En 1 minute, toutes les marches visibles de l'escalator disparaissent, alors  $v_e = \frac{n}{1}$ .

Vitesse propre d'Eliah =  $v_p = \frac{n}{2}$  (il passe sur toutes les marches en 2 minutes).

Vitesse réelle d'Eliah =  $v_e + v_p = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$ . Sur l'escalator en mouvement, Eliah pourrait grimper 3 fois le nombre de marches visibles en 2 minutes (120 secondes). Pour monter les  $n$  marches visibles, cela lui prend **40 secondes** (120 : 3).

- b) Naomi ne peut poser ses pieds que sur un certain nombre des 6 marches visibles au départ. La vitesse propre de Naomi est de 2 marches à la seconde, mais lorsqu'elle est sur l'escalator, sa vitesse réelle est de 3 marches à la seconde car l'escalator avance de 1 marche à la seconde. Il faut 6 secondes pour que toutes les marches visibles au départ aient disparu. A raison de 3 marches à la seconde, Naomi passera 2 secondes sur l'escalator pour le monter. En 2 secondes, 2 marches de l'escalator vont disparaître. Cela signifie que Naomi a mis les pieds sur **4 marches** ( $6 - 2$ ) durant la montée (ce sont les 4 marches qui n'ont pas encore disparu).
- c) Il est évident que l'escalator était en fonctionnement, sinon Joshua aurait emprunté 30 marches pendant la montée.

Pendant le temps  $t$  de la montée de Joshua, 18 marches ont disparu ( $30 - 12$ ).

Pour aller de bas en haut de l'escalator, Joshua a mis  $t$  secondes en allant à sa vitesse réelle.

Vitesse réelle de Joshua =  $v_e + 0,8$ .

$$v_e + 0,8 = \frac{30}{t} \quad (1) ; \quad v_e = \frac{18}{t} \quad (2).$$

$$\text{De (2), on obtient } t = \frac{18}{v_e}. \text{ Alors, } v_e + 0,8 = \frac{30v_e}{18} = \frac{5v_e}{3} \Rightarrow 3v_e + 2,4 = 5v_e \Rightarrow v_e = 1,2.$$

Vitesse de l'escalator = **1,2 marche à la seconde**.

- d) En allant dans le sens inverse de l'escalator, la vitesse réelle de Malia correspond à sa vitesse propre diminuée de celle de l'escalator. Sa vitesse réelle est donc de 0,4 marche à la seconde. Malia a donc besoin de 25 secondes pour descendre. En 25 secondes, Malia va passer sur toutes les marches visibles (10) de l'escalator au départ plus de nouvelles marches qui sont apparues pendant les 25 secondes de déplacement, ce qui correspond à 35 marches car l'escalator se déplace à la vitesse de 1,4 marche à la seconde. Malia va poser ses pieds sur **45 marches** ( $10 + 35$ ).
- e) L'escalator est évidemment en fonctionnement, sinon Dylan aurait emprunté 24 marches pendant la descente.

Pendant le temps  $t$  de la descente de Dylan, 12 marches ( $36 - 24$ ) sont apparues.

Pour descendre l'escalator, Dylan a mis  $t$  secondes en allant à sa vitesse réelle.

Vitesse réelle de Dylan =  $v_p - v_e$ .

$$v_p - v_e = \frac{24}{t} \quad (1) ; \quad v_e = \frac{12}{t} \quad (2). \text{ De (2), on obtient } t = \frac{12}{v_e}.$$

$$\text{Alors, } v_p - v_e = \frac{24v_e}{12} = 2v_e \Rightarrow v_p = 3v_e.$$

La vitesse propre de Dylan est **trois fois plus grande** que celle de l'escalator.

- f) Vitesse propre de Pascal =  $\frac{26}{15}$ . Vitesse propre de Kunie =  $\frac{22}{25}$ .

$$\text{Alors, } \frac{26}{15} + v_e = \frac{n}{15} \quad (1) \text{ et } \frac{22}{25} + v_e = \frac{n}{25} \quad (2). \text{ De (1), on tire } v_e = \frac{n-26}{15}.$$

$$\text{Alors (2) devient } \frac{22}{25} + \frac{n-26}{15} = \frac{n}{25} \Rightarrow \frac{66+5n-130}{75} = \frac{3n}{75} \Rightarrow 2n = 64 \Rightarrow n = 32 \text{ marches.}$$

$$\text{Vitesse de l'escalator} = \frac{32-26}{15} = \frac{6}{15} = 0,4 \text{ marche à la seconde.}$$

Pour descendre, Théodore va marcher sur les 32 marches visibles au départ plus sur les nouvelles marches apparues pendant les 30 secondes de son déplacement. En 30 secondes, 12 nouvelles marches sont apparues (0,4 marche en 1 seconde = 12 marches en 30 secondes).

Théodore a posé ses pieds sur **44 marches** ( $32 + 12$ ).

Voici pour terminer quelques relations fort utiles dans la résolution des problèmes d'escalator.

**L'escalator et la personne sont en mouvement et ils vont dans le même sens.**

$$v_p = \frac{m}{t} ; v_r = v_p + v_e = \frac{n}{t} ; v_e = \frac{n-m}{t} .$$

$$m = n - n \cdot \frac{v_e}{v_p + v_e} .$$

**L'escalator et la personne sont en mouvement et ils ne vont pas dans le même sens.**

$$v_p = \frac{m}{t} ; v_r = v_p - v_e = \frac{n}{t} ; v_e = \frac{m-n}{t} .$$

$$m = n + n \cdot \frac{v_e}{v_p - v_e} .$$