13. Les cryptarithmes * ** * ******

On appelle **cryptarithme** (ou **cryptogramme**) une opération mathématique dans laquelle certains chiffres (pas forcément tous) ont été remplacés par des lettres. Chaque lettre différente représente un chiffre différent et chaque chiffre est représenté par la même lettre. Un nombre ne peut évidemment pas commencer par zéro. Les e, é, è et ê sont considérés comme une même lettre.

Exemple : AB5B représente un nombre de 4 chiffres qui peut valoir 1252 ou 3858 ou 5454 etc. Il ne peut pas valoir 9357 car dans ce cas B vaudrait 3 et 7. Il existe une multitude d'énigmes de ce genre. Souvent, il est nécessaire de faire de nombreux essais pour les résoudre. Les cryptarithmes les plus intéressants sont ceux qui peuvent être résolus par raisonnement, au moins en grande partie. Ce sont ceux-là qui nous intéressent ici. Un côté amusant s'ajoute au problème lorsque les lettres d'un cryptarithme forment des mots ayant un sens.

Rappels : il n'existe que 10 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, et 9) avec lesquels on peut écrire une infinité de nombres. Un point (·) est utilisé comme signe de la multiplication.

Voici quelques cryptarithmes présentés dans un ordre croissant de difficultés :

a) 24 · AA = BAD. Quel nombre représente BAD ?

b) BA + BA + BA = ABC. Quel nombre représente BA ?

c) LUI + LUI = EUX. Quel est le plus petit nombre représentant EUX ? Quel est le plus grand nombre représentant EUX ?

d) ANNA + RENE = AMOUR. Quels nombres représente RENE ?

e) EUX : 7 = LUI. Quels nombres représente LUI ?

f) SUISSE + SUEDE = BRESIL. Quels nombres représente SUISSE ?

Aux questions d, e et f, il est écrit « quels nombres ». Cela laisse supposer qu'il peut y avoir plusieurs solutions. Si c'est le cas, il faut les trouver toutes.

Solutions

a) AA représente 11 ou 22 ou 33 (à partir de AA = 44, on obtient un produit formé de 4 chiffres). 24 · 11= 264 ; 24 · 22 = 528 ; 24 · 33 = 792. BAD représente **528** (le chiffre des dizaines doit être 2).

b) A de ABC vaut 1 ou 2. Cela signifie que la somme des A (qui donne C) est inférieure à 10, donc pas de retenue. La somme des B est un nombre de 2 chiffres qui se termine par B. B ne peut valoir que 5 (un nombre ne peut pas commencer par 0). La somme des B est 15, donc A = 1. Alors, C = 3. BA représente **51**.

c) Comme on veut le plus petit nombre représentant EUX, essayons L = 1, U = 0 et I = 2. Ca ne joue pas car E vaut aussi 2. Essayons avec I = 3. Dans ce cas, ça marche : 103 + 103 = **206**.

Pour le plus grand nombre, essayons L = 4. Alors, E = 8 ou 9. Tentons U = 9 car 2 · 9 + 1 (retenue) = 19. Mais dans ce cas, E vaudra aussi 9. Donc U $\neq$ 9. Quelques essais démontrent aisément que U ne peut que valoir 0. Comme il ne faut pas de retenue dans la dernière colonne, alors I = 3 et tout fonctionne : 403 + 403 = **806**.

d) Dans les tableaux ci-dessous, on a numéroté les colonnes.

1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	N	N	A
	R	E	N	E
A	M	O	U	R

1	*2*	*3*	*4*	*5*
	1			1
	8	7		7
1	0			8

1	*2*	*3*	*4*	*5*
	1			1
	9	8		8
1	0			9

Les éventuelles retenues ne peuvent valoir que 1. A+R (2ème colonne) donne un nombre de 2 chiffres, donc A = 1. Alors, le R de RENE vaut 8 ou 9.

Si R = 8, alors E, selon la 5ème colonne, est égal à 7, et M = 0. Nous avons la situation indiquée dans le 2ème tableau. Il nous reste à trouver les valeurs de N, O et U. N = 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 9. Remplaçons systématiquement les N par ces valeurs. Cela va très vite. On va s'apercevoir que seulement N = 6 fonctionne et on a 1661 + 8767 = 10428.

Cela ne nous dispense pas d'essayer R = 9 (3ème tableau). M = 0 (le 1 est déjà pris). 8 + N de la 3ème colonne donnera à coup sûr une retenue car N est égal à 2, au minimum. Avec une retenue de 1, la 2ème colonne donne une somme de 11, ce qui n'est pas possible. Il n'y a donc pas de solution avec R = 9.

Il n'y a donc qu'une seule solution dans laquelle RENE représente **8767**.

e) EUX : 7 = LUI revient à faire LUI · 7 = EUX.

Comme 142 · 7 = 994, alors LUI vaut au plus 142. Comme LUI est un nombre à 3 chiffres, il est alors compris entre 99 et 143. On sait donc que L = 1.

E = 7 ou 8 ou 9. Le produit de 7 par U ne doit pas amener une retenue supérieure à 2, ce qui serait le cas avec un U supérieur à 4. Alors U = 0 ou 2 ou 3 ou 4 (1 est déjà pris).

Si U = 0, I sera un chiffre supérieur à 1 et le produit de 7 par I donnera une retenue. U $\neq$ 0.

Si U = 2, le produit de 7 fois 2 donne 14. Il faudrait une retenue de 8 (14 + 8 = 22) du produit de 7 par I, ce qui est impossible. U $\neq$ 2.

Si U = 3, alors E = 9. Comme 7 fois 3 = 21, il faut une retenue de 2 du produit de 7 par I. Cela n'est possible que pour I = 3 ou 4. Comme le 3 est déjà utilisé, alors I = 4. On a donc 134 · 7 = 938. LUI représente **134**.

f) Mettons aussi cette opération en colonne avec une ligne réservée aux éventuelles retenues.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
S	U	I	S	S	E
	S	U	E	D	E
B	R	E	S	I	L

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	0	1	1	1	
S	U	I	S	S	9
	S	U	9	D	9
B	R	9	S	I	8

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	0	1	1	1	
4	U	I	4	4	9
	4	U	9	D	9
5	R	9	4	I	8

Les éventuelles retenues ne peuvent valoir que 1. S + E (4ème colonne) = S $\Rightarrow$ S = 0 ou 9. S ne peut pas valoir 0 car S de la première colonne doit être différent de 0. Donc E = 9. Alors, L = 8. Il y aura forcément une retenue dans les colonnes 3 et 5, et pas de retenue dans la 2ème colonne (la somme dans la 3ème colonne ne peut pas être 19). Dans la première colonne, il a forcément une retenue car S $\neq$ B.

Dans la 4ème colonne, on a S + 9 = S avec S $\neq$ 0. Dans ce cas, il faut que la 4ème colonne ait une retenue. Par exemple, si S = 7, on a 7 + 9 = 16, il faut bien une retenue de 1 pour obtenir 17. On a maintenant le 2ème tableau.

Dans la 3ème colonne, on a 1 + I + U = 9 (a). Dans la 5ème colonne, on a 1 + S + D = 10 + I (b), (le 10 provient du fait que l'on veut une retenue dans la 4ème colonne). De (a) et (b), on en déduit que S + D + U = 17. S, D et U valent, dans le désordre, 4, 6 et 7.

Dans la première colonne, on a S + 1 = B. Selon le paragraphe précédent, seule la valeur 4 peut être attribuée à S. Alors, B = 5. On peut compléter les S et B dans le 3ème tableau. Il reste pour U et D, les valeurs 6 et 7.

2ème colonne : U + 4 = R + 10 $\Rightarrow$ U = R + 6 (p) $\Rightarrow$ R = 0 ou 1.

3ème colonne : 1 + I + U = 9 $\Rightarrow$ U + I = 8 (q)

5ème colonne : 1 + 4 + D = I + 10 $\Rightarrow$ D = I + 5.

Si R = 1 dans (p), alors U = 7 et I (q) = 1, impossible. Alors R = 0, puis U = 6, puis I = 2 et enfin D = 7.

Nous obtenons 462'449 + 46'979 = 509'428. SUISSE = **462'449**.

– Augustin Genoud, août 2013 –