125. Les fractions continues ***

La prestigieuse horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg, inaugurée le 31 décembre 1842 à minuit et toujours en fonction, est l'œuvre de Jean-Baptiste Schwilgué (1776 – 1856). Cette horloge comporte, en plus de l'heure exacte, divers cadrans, calendriers et automates, tous d'une précision extraordinaire. Schwilgué réussit ces prouesses grâce notamment à ses connaissances mathématiques dans le domaine des fractions continues.

Tout nombre réel (nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une partie entière et d'une liste finie ou infinie de décimales) peut être représenté par une fraction continue (plus rarement appelée fraction continuée) comprenant un nombre fini ou infini d'étages et ayant la forme suivante :

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\ldots}}}}$$

Pour des raisons de commodité, la fraction continue peut être notée ainsi : $[a_1; a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots]$

Voici comment trouver la fraction continue de $\frac{218}{63}$.

	Dividende	Diviseur	Valeur entière du quotient	Reste
A	218	63	3	29
B	63	29	2	5
C	29	5	5	4
D	5	4	1	1
E	4	1	4	0

Comme 218 = 3 · 63 + 29, on peut remplir la ligne « A » du tableau de gauche. Ensuite, le diviseur de « A » devient le dividende de « B » et le reste de « A » devient le diviseur de de « B », et ainsi de suite pour les lignes suivantes.

On s'arrête lorsque le reste est égal à 0.

Les nombres de la colonne « Valeur entière du quotient » sont les a_i de la fraction continue. On obtient alors :

$$\frac{218}{63}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$$

La fraction $\frac{218}{63}$ est égale à $[3; 2, 5, 1, 4]$

Dans le tableau suivant, on a enlevé successivement la dernière fraction de notre fraction continue. On obtient ainsi de nouvelles fractions qui représentent de moins en moins précisément notre fraction initiale.

$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$	$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1}}}$	$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}$	$3+\cfrac{1}{2}$	3
$\frac{218}{63}$	$\frac{45}{13}$	$\frac{38}{11}$	$\frac{7}{2}$	3
$3,\overline{460317}$	$3,\overline{461538}$	$3,\overline{45}$	3,5	3

a) Quelle est la fraction continue de $\frac{63}{218}$?

b) Quelle est la fraction équivalente à [4; 2, 2, 1, 5] ?

c) Quelle est la fraction continue de $\frac{972}{1393}$?

d) Le nombre π est un nombre irrationnel. Il ne peut donc pas être exprimé par un rapport de deux nombres entiers. Une valeur approximative de π est 3,14. Comme $3{,}14 = \frac{314}{100}$, cherchez la fraction continue représentant $\frac{314}{100}$. Quelle est la fraction représentant aussi approximativement π si on enlève la dernière fraction de la fraction continue de $\frac{314}{100}$?

Solutions

a) Utilisons le procédé présenté dans la donnée :

Dividende	Diviseur	Valeur entière du quotient	Reste
63	218	0	63
218	63	3	29
63	29	2	5
29	5	5	4
5	4	1	1
4	1	4	0

Alors, $$\frac{63}{218} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}$$

La fraction $\frac{63}{218}$ est égale à **[0; 3, 2, 5, 1, 4].**

Comparez cette réponse avec la fraction continue de $\frac{218}{63}$ donnée en exemple.

b) La fraction continue [4; 2, 2, 1, 5] peut s'écrire de la manière suivante :

$$4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$$

En calculant étape par étape, on trouve qu'elle est égale à **177/40**.

c) Utilisons toujours le même procédé :

Dividende	Diviseur	Valeur entière du quotient	Reste
972	1393	0	972
1393	972	1	421
972	421	2	130
421	130	3	31
130	31	4	6
31	6	5	1
6	1	6	0

Alors, $\dfrac{972}{1393}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}}$

La fraction $\dfrac{972}{1393}$ est égale **à [0; 1, 2, 3, 4, 5 ; 6].**

d) Continuons de la même manière :

Dividende	Diviseur	Valeur entière du quotient	Reste
314	100	3	14
100	14	7	2
14	2	7	0

Alors, $\dfrac{314}{100}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7}}$

La fraction $\dfrac{314}{100}$ est égale à **[3; 7, 7]**.

En enlevant la dernière fraction, on obtient $3+\dfrac{1}{7}$ qui est égale à **22/7** qui est une fraction parfois utilisée comme valeur approchée de π.

Mon ami Gérard Charrière m'expliqua un jour comment le génial Jean-Baptiste Schwilgué s'y prit pour faire correspondre la durée de révolution de la Terre à celle de Jupiter, pour l'horloge de Strasbourg.

Schwilgué choisit 365 jours 5 heures 48 minutes et 48 secondes, soit 31'556'928 secondes, comme durée de révolution de la Terre autour du Soleil et 4330 jours 14 heures 14 minutes et 10 secondes, soit 374'163'250 secondes, comme durée de révolution de Jupiter autour du Soleil. Il devait alors réaliser le rapport $\dfrac{31'556'928}{374'163'250}$ *par un système d'engrenage constitué de roues dentées. Pour des raisons techniques, les dimensions des roues dentées étaient limitées à environ 500 dents, au maximum, et à 20 dents, au minimum. Schwilgué transforma le rapport en fraction continue, ce qui donna [0; 11, 1, 5, 1, 53, 1, 15, 26, 2, 1] et choisit l'approximation [0; 11, 1, 5, 1, 53, 1] qui est égale à* $\dfrac{384}{4553}$*. Il réalisa l'engrenage* $\dfrac{384}{4553}$ *à l'aide des engrenages* $\dfrac{96}{157}$ *et* $\dfrac{32}{232}$ *dont le produit vaut* $\dfrac{384}{4553}$*.*

Les mouvements obtenus par les engrenages de Schwilgué correspondent de manière extraordinaire aux durées exactes de révolutions de la Terre et de Jupiter.